Phần I

TÓM TẮT VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÀ TAM THỨC BẬC HAI

I. Định nghĩa và cách giải

Phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ gọi là phương trình bậc 2 (PTBH).

Đa thức: $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ được gọi là tam thức bậc 2 (TTBH).

*. Nghiệm của PTBH (nếu có) cũng được gọi là nghiệm của TTBH.

*. Dạng chính tắc của TTBH:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \qquad (1)$$

Từ dạng (1) ta đưa ra cách giải và công thức nghiệm như SGK đã trình bày.

II. Sự phân tích TTBH

Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ với x_1, x_2 là các nghiệm.

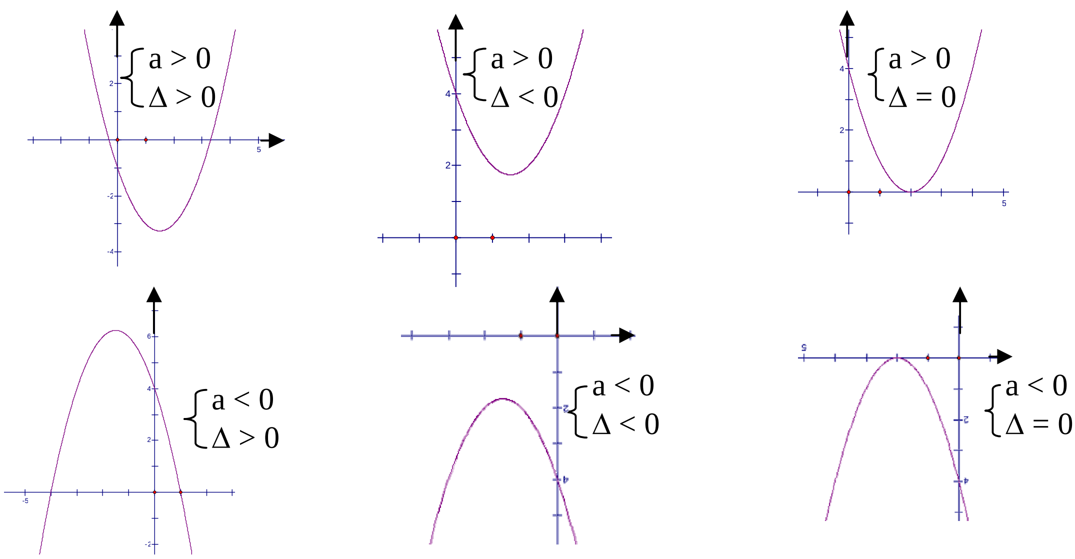
III. Định lý Vi-ét

Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

và: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Ngược lại: Nếu $x + y = S$ và $x.y = P$ thì x, y là các nghiệm của phương trình bậc hai: $t^2 - St + P = 0$

IV. Đồ thị hàm số bậc 2:



V. GTLN, GTNN:

Nếu a > 0 $\Rightarrow$ f(x) $\geq -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow Min\ f(x) = -\frac{\Delta}{4a}$

Nếu a < 0 $\Rightarrow$ f(x) $\leq -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow Max\ f(x) = -\frac{\Delta}{4a}$

GTLN (GTNN) đạt được $\Leftrightarrow$ x= -b/2a

VI. Dấu tam thức bậc 2:

Cho f(x) = $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Nếu $\Delta < 0$ thì af(x) > 0 $\forall$ x $\in$R.

Nếu $\Delta = 0$ thì af(x)$\geq$ 0 $\forall$ x $\in$ R. Đẳng thức khi x = -b/2a

Nếu $\Delta > 0$ thì af(x) < 0 $\forall$ x $\in(x_1;x_2)$.

af(x) $\geq$ 0 $\forall$ x $\in$ $(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$

Đảo lại:

1) Nếu $\exists\ \alpha$ sao cho: af(α) < 0 thì f(x) có 2 nghiệm phân biệt và $x_1 < \alpha < x_2$

2) $\begin{cases} af(\alpha) > 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{S}{2} < \alpha \end{cases} \Leftrightarrow x_1 < x_2 < \alpha;$ $\quad\begin{cases} af(\alpha) > 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{S}{2} > \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \alpha < x_1 < x_2$

Hệ quả trực tiếp:

1') Cho $\alpha < \beta$, f(x) = $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

$\left[\begin{array}{l} x_1 < \alpha < x_2 < \beta \\ \alpha < x_1 < \beta < x_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow f(\alpha).f(\beta) < 0$

2') $\alpha < x_1 < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < \frac{S}{2} < \beta \end{cases}$

Trên đây là 6 nội dung cơ bản nhất về PTBH và TTBH mà SGK ĐS-10 đã trình bày khá kỹ.

Sau đây là các ví dụ ứng dụng.

Phần II

CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG CƠ BẢN

1.GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phép giải phương trình bậc 2 với hệ số bằng số khá đơn giản. Ở đây ta chỉ đề cập đến các phương trình chứa tham số. Một chú ý quan trọng ở đây là: *Ta thường quên mất không xét đến trường hợp hệ số a = 0*.

VD1: Cho phương trình:

$$(m^2 - 4)x^2 + 2(m + 2)x + 1 = 0 \quad (1)$$

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Giải: a) Thông thường HS hay mắc sai lầm là chỉ xét đến trường hợp: $\Delta \geq 0$ mà bỏ quên trường hợp a = 0

* Nếu $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$. Giá trị m = -2 không thoả mãn.

* Nếu $m \neq \pm 2$:

pt(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \neq 2$

Tóm lại pt(1) có nghiệm $\Leftrightarrow m > -2$

b) pt(1) có nghiệm duy nhất trong 2 trường hợp:

*Trường hợp 1: $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

*Trường hợp 2: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ m = -2 \end{cases}$ (Trường hợp này không xảy ra)

Vậy với m = 2 pt(1) có nghiệm duy nhất.

VD2: Biện luận theo m số nghiệm pt:

$$x^3 + m(x + 2) + 8 = 0^{(2)}$$

Ta có: $x^3 + 8 - m(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4 - m) = 0$

Đặt $f(x) = x^2 - 2x + 4 - m \Rightarrow$ số nghiệm pt (2) phụ thuộc số nghiệm của f(x).

$\Delta' = m - 3$, $f(-2) = 12 - m$

Do đó ta có:

1) $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 3 \Rightarrow$ f(x) VN $\Rightarrow$ pt(2) có 1 nghiệm duy nhất x = -2

2) $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 3$. Khi đó $f(-2) = 12 - m \neq 0$ nên f(x) có 1 nghiệm khác -2 $\Rightarrow$ pt(2) có nghiệm phân biệt ($x_1 = -2$; $x_2 = 1$)

3) $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 3$

*Nếu $\begin{cases} m > 3 \\ m \neq 12 \end{cases} \Rightarrow$ pt(2) có 3 nghiệm phân biệt.

* Nếu m =12 $\Rightarrow$ pt(2) có 2 ngh 2 nghiệm: 1 nghiệm đơn và một nghiệm kép.

VD3: Cho hàm số: $y = (x - 2)(x^2 + mx + m^2 - 3)$ (3) có đồ thị (*C*). Tìm m để:

a) (*C*) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt.

b) (*C*) tiếp xúc với Ox.

Giải tóm tắt: Đặt $f(x) = x^2 + mx + m^2 - 3$

a) (*C*) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases}$

b) (*C*) tiếp xúc với Ox $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(2) = 0 \\ \Delta = 0 \end{array}\right.$

VD4: Chứng minh rằng: Nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác thì phương trình $a^2x^2 + (a^2 + b^2 - c^2)x + b^2 = 0$ (4) vô nghiệm

Thật vậy: $\Delta = (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2$

$= (a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)$

$= [(a - b)^2 - c^2][(a + b)^2 - c^2]$

$= (a - b - c)(a - b + c)(a + b - c)(a + b + c) < 0$

BÀI TẬP:

1.1. Giải phương trình:

$(x + 1)(|x| - 1) = -\frac{1}{2}$

1.2. Giả sử x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$. Hãy thiết lập phương trình với các nghiệm là: $y_1 = \frac{1}{x_1}$ và $y_2 = \frac{1}{x_2}$

1.3. Tìm tất cả các giá trị của k để phương trình:

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} = k(x - 3)$$

có nghiệm kép không âm

1.4. Tìm tất cả các giá trị của p để parabol:

$$y = x^2 + 2px + 13$$

có đỉnh cách gốc toạ độ một khoảng bằng 5

2. BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG CỦA HAI NGHIỆM
HỆ THỨC GIỮA CÁC NGHIỆM PTBH

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$, $x_1x_2 = P$

Ta có $S_1 = x_1 + x_2 = S$

$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$

. . . .

S_n được tính theo công thức truy hồi sau:

$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0$ (*)

Ta chứng minh (*) như sau: Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình:

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow$ $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ (1)

$ax_2^2 + bx_2 + c = 0$ (2)

Nhân hai vế của (1) và (2) lần lượt với x_1^{n-2} và x_2^{n-2} ($n\in Z$, $n > 2$) Ta có:

$ax_1^n + bx_1^{n-1} + cx_1^{n-2} = 0$ (3)

$ax_2^n + bx_2^{n-1} + cx_2^{n-2} = 0$ (4)

Cộng (3) và (4) vế với vế ta được

$a(x_1^n + x_2^n) + b(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) + c(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) = 0$

Ta có điều PCM.

__VD5__: Cho $A = (1+\sqrt{3})^5 + (1-\sqrt{3})^5$. Chứng minh $A \in Z$

HS: $A = S_5 = 152$

__VD6__: Cho $f(x) = 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của f(x). Tìm Max A

$A=| x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 |$

__Giải:__ Để $\exists$ x_1, x_2 thì $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow -5 \le m \le -1$ (*)

Khi đó: $A = \left|\dfrac{m^2 + 8m + 7}{2}\right|$

Xét dấu của A ta có: $m^2 + 8m + 7 \le 0$ $\forall x$ thoả mãn (*)

$\Rightarrow A = \dfrac{-m^2 - 8m - 7}{2} = \dfrac{9-(m+4)^2}{2} \le \dfrac{9}{2} \Rightarrow MaxA = \dfrac{9}{2}$

__VD7__: Tìm điều kiện cần và đủ để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \ne 0$) có 2 nghiệm và nghiệm này gấp k lần nghiệm kia.

__Giải:__ Xét: $M = (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = \ldots\ldots$

$= (k + 1)^2ac - kb^2$

$\Rightarrow$ Điều kiện cần: Nếu $x_1 = kx_2$ hoặc $x_2 = kx_1 \Rightarrow M = 0$

$\Leftrightarrow (k + 1)^2ac = kb^2$

Điều kiện đủ: Nếu $(k + 1)^2ac = kb^2 \Leftrightarrow M = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = kx_2 \\ x_2 = kx_1 \end{array}\right.$

<u>VD8</u>: Biết a, b, c thoả mãn: $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 2 & (1) \\ ab + bc + ca = 1 & (2) \end{cases}$

Chứng minh: $-\frac{4}{3} \le a,b,c \le \frac{4}{3}$ (3)

<u>Nhận xét:</u> Từ (1) và (2) ta thấy vai trò của a, b, c bình đẳng nên ta chỉ cần chứng minh 1 trong 3 số a, b, c thoả mãn (3).

Đặt: $S = a + b$

$P = ab$ Từ (1) và (2) ta có:

$S^2 - 2P = 2 - c^2$ (4)

$P + cS = 1$ (5)

Từ (5) $\Rightarrow P = 1 - cS$ thay vào (4) ta có

$S^2 - 2(1 - cS) = 2 - c^2 \Leftrightarrow S^2 + 2cS + c^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = -c + 2 \\ S = -c - 2 \end{array}\right.$

* Nếu $S = -c + 2 \Rightarrow P = c^2 - 2c + 1 \Rightarrow$ a, b là nghiệm của phương trình:

$t^2 - (2 - c)t + c^2 - 2c + 1 = 0$ Phương trình này phải có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le c \le 4/3$

* Nếu $S = -c - 2$ Tương tự ta có: $-4/3 \le c \le 0$

Tóm lại: Ta có $-\frac{4}{3} \le a,b,c \le \frac{4}{3}$

<u>VD9</u>: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + m$ cắt Ox tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho: OA = 3 OB

HD: $OA = | x_A |$; $OB = | x_B |$ và xét 2 trường hợp:

$x_A = 3x_B$

và $x_A = -3x_B$

<u>BÀI TẬP:</u>

2.1. Tìm tất cả các giá trị của m để tổng các bình phương các nghiệm của phương trình: $x^2 - mx + m - 1 = 0$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2.2. Giả sử (x, y) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$$

Xác định a để tích xy nhỏ nhất

3. **QUAN HỆ GIỮA CÁC NGHIỆM CỦA HAI PTBH**

1) Hai phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ và $a'x^2 + b'x + c = 0$

có nghiệm chung ⇔ Hệ $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a'x^2 + b'x + c = 0 \end{cases}$ (1) có nghiệm

Ta có thể giải hệ (1) bằng phương pháp thế. Tuy nhiên nếu ta giải theo phương pháp sau đây thì đơn giản hơn nhiều:

Đặt $x^2 = y$ ta có: $\begin{cases} ay + bx = -c \\ a'y + b'x = -c' \end{cases}$ (2)

⇒ Hệ (1) có nghiệm ⇔ $\begin{cases} \text{Hệ (2) có nghiệm} \\ y = x^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D \neq 0 \\ \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{D_x^2}{D^2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} D \neq 0 \\ D_y = \dfrac{D_x^2}{D} \end{cases}$$

<u>VD10</u>: Chứng minh rằng nếu 2 phương trình $x^2 + p_1x + q_1 = 0$

và $x^2 + p_2x + q_2 = 0$

có nghiệm chung thì: $(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(q_2p_1 - q_1p_2) = 0$

HD: Sử dụng phương pháp đã trình bày ở trên.

2) Hai phương trình bậc 2 tương đương.

<u>Chú ý:</u> *HS hay bỏ sót trường hợp: Nếu 2 phương trình cùng vô nghiệm thì tương đương (trên tập nào đó)*

<u>VD11</u>: Tìm m để hai phương trình $x^2 - mx + 2m - 3 = 0$

và $x^2 - (m^2 + m - 4)x + 1 = 0$

tương đương

*Trường hợp 1: $\begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{cases}$

*Trường hợp 2: Sử dụng Vi-ét

3) Hai phương trình có nghiệm xen kẽ nhau.

<u>Chú ý rằng:</u> *Mọi phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ bao giờ cũng đưa được về dạng: $x^2 + px + q = 0$*

Do đó ta có bài toán: Với điều kiện nào của p, q, p', q' để 2 phương trình:

$x^2 + px + q = 0$ và $x^2 + p'x + q' = 0$ có nghiệm xen kẽ nhau.

Ta xét 2 khả năng:

* ***Khả năng 1***: Nếu p = p'

Khi đó: Nếu q = q' $\Rightarrow$ 2 đồ thị trùng nhau (không thoả mãn)

Nếu q $\neq$ q' $\Rightarrow$ Đồ thị này là tịnh tiến của đồ thị kia dọc theo đường thẳng $x = -\frac{P}{2}$ nên cũng không thoả mãn.

* ***Khả năng 2***: Nếu p $\neq$ p' $\Rightarrow$ 2 parabol cắt nhau tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{q-q'}{p'-p} \Rightarrow y_0 = \left(\frac{q-q'}{p'-p}\right)^2 + p\left(\frac{q-q'}{p'-p}\right) + q \Rightarrow$

Để 2 phương trình có nghiệm xen kẽ nhau thì $y_0 < 0$

$\Leftrightarrow (q - q')^2 + p(q - q')(p' - p) + q(p' - p)^2 < 0$

<u>VD12</u>: Tìm m để 2 phương trình $x^2 + 3x + 2m = 0$ và $x^2 + 6x + 5m = 0$ có nghiệm xen kẽ nhau.

ĐS: $m \in (0 ; 1)$

<u>BÀI TẬP:</u>

3.1. Cho hai phương trình:

$x^2 - 2x + m = 0$ và $x^2 + 2x - 3m = 0$

a). Tìm m để 2 phương trình có nghiệm chung.

b). Tìm m để 2 phương trình tương đương.

c). Tìm m để 2 phương trình có các nghiệm xen kẽ nhau.

3.2. Tìm m để hai phương trình sau có nghiệm chung:

$x^2 - mx + 2m + 1 = 0$ và $mx^2 - (2m + 1)x - 1 = 0$

3.3. Tìm m và n để hai phương trình tương đương:

$x^2 - (2m + n)x - 3m = 0$ và $x^2 - (m+3n)x - 6 = 0$

3.4. Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt:

$(x^2 - mx + 1)(x^2 + x + m) = 0$

4. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA PTBH

1) Sử dụng: PT $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

VD13: Chứng minh rằng: Nếu $a_1.a_2 \geq 2(b_1 + b_2)$ thì ít nhất 1 trong 2 phương trình $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ (1)

$x^2 + a_2x + b_2 = 0$ (2) có nghiệm

Giải: $\Delta_1 = a_1^2 - 4b_1$; $\Delta_2 = a_2^2 - 4b_2$

Do đó: $\Delta_1 + \Delta_2 = a_1^2 + a_2^2 - 4(b_1 + b_2) \geq a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \geq 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta_1 \geq 0\\ \Delta_2 \geq 0\end{array}\right. \Rightarrow DPCM$$

VD14: Chứng minh rằng: Trong 3 phương trình sau:

$x^2 + 2ax + bc = 0$

$x^2 + 2bx + ca = 0$

$x^2 + 2cx + ab = 0$

Có ít nhất một phương trình có nghiệm

Giải: Ta có: $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 0$

$\Rightarrow$ có ít nhất 1 biểu thức không âm $\Rightarrow$ ĐPCM

2) Sử dụng định lý về dấu tam thức bậc hai:

* Nếu $af(\alpha) < 0 \Rightarrow x_1 < \alpha < x_2$

* Nếu $f(\alpha)f(\beta) < 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_1 < \alpha < x_2 < \beta\\ \alpha < x_1 < \beta < x_2\end{array}\right.$

Điều quan trọng là việc chọn α, β sao cho hợp lý.

VD15: Chứng minh rằng: Phương trình:

$f(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$

Với $a < b < c$ luôn có 2 nghiệm phân biệt thoả mãn:

$a < x_1 < b < x_2 < c$

Giải: Rõ ràng f(x) là 1 TTBH có hệ số của x^2 là 3 và:

$f(b) = (b - c)(b - a) < 0$ vì $a < b < c$

$\Rightarrow$ f(x) có 2 nghiệm và $x_1 < b < x_2$

$f(a) = (a - b)(a - c) > 0$ vì $a < b < c$ nên a nằm ngoài $[x_1 ; x_2]$ mà $a < b$

$\Rightarrow a < x_1 < b < x_2$

f(c) = (c - a)(c - b) > 0 nên c nằm ngoài $[x_1;x_2]$ mà c > b nên $a< x_1< b <x_2< c$

VD16: Chứng minh: Nếu | a+c | < | b | thì pt: $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm.

Giải: * Nếu a = 0 ⇒ | c | < | b | ⇒ b ≠ 0 ⇒ phương trình trở thành:

bx + c = 0 có nghiệm x = - c/b

* Nếu a ≠ 0 thì | a+c | < | b | ⇔ $(a + c)^2 < b^2$

⇔ (a + c - b)(a + c + b) < 0 ⇔ f(-1)f(1) < 0 ⇒ $f(x) = ax^2 + bx + c$ luôn luôn có nghiệm ∈ (0;1)

VD17: Biết: 2a + 3b + 6c = 0

Chứng minh: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm ∈ (0;1)

Giải: * Nếu a = 0 ⇒ 3b + 6c = 0 ⇔ $b.\frac{1}{2} + c = 0$ ⇒ x = 1/2 là nghiệm của phương trình (và 1/c ∈ (0;1))

* Nếu a ≠ 0 ⇒ 2a + 3b + 6c = f(1) + f(0) + 4f(1/2) = 0

Nhưng f(0), f(1), f(1/2) không thể đồng thời bằng 0 vì nếu như vậy thì phương trình bậc 2 có 3 nghiệm phân biệt (!). Điều đó chứng tỏ: Trong 3 biểu thức f(0), f(1), f(1/2) phải tồn tại 2 biểu thức trái dấu

⇒ f(x) có ít nhất 1 nghiệm ∈ (0;1)

BÀI TẬP:

4.1. Cho a, b, c là 3 số khác nhau và khác 0. Chứng minh rằng: phương trình sau luôn có nghiệm:

$$ab(x - a)(x - b) + bc(x - b)(x - c) + ca(x - c)(x - a) = 0$$

4.2. Cho m > 0 và a, b, c là 3 số thoả mãn:

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$$

Chứng minh rằng: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm trong (0;1)

4.3. Chứng minh rằng phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm nếu một trong hai điều kiện sau được thoả mãn:

a(a + 2b + 4c) < 0

5a + 3b + 2c = 0

4.4. Biết rằng phương trình: $x^2 + ax + b + c = 0$ vô nghiệm. Chứng minh rằng phương trình: $x^2 + bx - a - c = 2$ có nghiệm.

4.5. Chứng minh rằng phương trình: $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = m$ có nghiệm với mọi m.

5. TAM THỨC BẬC HAI VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

1) Dạng áp dụng trực tiếp dấu TTBH:

<u>VD18</u>: Cho Δ ABC chứng minh rằng:

$$1+\frac{x^2}{2} \geq CosA + x(CosB + CosC) \qquad \forall x \in R$$

Xét f(x) = $\frac{x^2}{2}$ - x(cosB + cosC) + 1 - cosA ≥ 0 ∀ x ∈ R

Δ_x = $(\cos B + \cos C)^2$ - 2(1 - cosA) = $-4Sin^2\frac{A}{2}Sin^2\frac{B-C}{2} \leq 0$

⇒ ĐPCM

Dấu đẳng thức xẩy ra ⇔ A = B = C hay tam giác ABC đều.

<u>Chú ý:</u> Nếu x= 1 ⇒ cosA + cosB + cosC ≤ $\frac{3}{2}$ là 1 bất đẳng thức quen thuộc

2) Dạng áp dụng ngược lại:

Giả sử: Cần phải chứng minh dạng: Δ ≤ 0 ta chứng minh f(x) không đổi dấu khi đó ta viết Δ ≤ 0 thành dạng: b^2 - 4ac để xác định f(x).

<u>VD19</u>: Chứng minh bất đẳng thức Bunhiacopxky:

$$\sum a_{,i}^2\sum b_i^2 \geq \left(\sum a_ib_i\right)^2 \qquad (1) \quad i=\overline{1,n}$$

Bất đẳng thức ⇔ $\left(\sum a_ib_i\right)^2 - \sum a_i^2\sum b_i^2 \leq 0$ (2)

*Nếu $a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_n = 0$ ⇒ bất đẳng thức (1) hiển nhiên đúng.

Nếu $\sum a_i^2 \neq 0$ Ta xét tam thức:

f(x) = $\left(\sum a_i^2\right)x^2 - 2\left(\sum a_ib_i\right)x + \sum b_i^2$

Ta có f(x) = $\sum\left(a_ix - b_i\right)^2 \geq 0 \quad \forall x \in R \Rightarrow \Delta' \leq 0$ chính là ĐPCM.

Dấu "=" ⇔ x = $\frac{b_i}{a_i} = \lambda$

<u>VD20</u>: Các số a, b, c, d, p, q thoả mãn:

$$p^2 + q^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 > 0 \qquad (1)$$

Chứng minh: $(p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \leq (pq - ac - bd)^2$ (2)

<u>Giải:</u> Vì (1) nên: $(p^2 - a^2 - b^2) + (q^2 - c^2 - d^2) > 0$

⇒ ∃ 1 trong 2 số hạng khác 0 và dương. Không mất tính tổng quát, giả sử: $p^2 - a^2 - b^2 > 0$

Xét tam thức: f(x) = $(p^2 - a^2 - b^2)x^2 - 2(pq - ac - bd)x + (q^2 - c^2 - d^2)$

Ta có f(x) = $(px - q)^2 - (ax - c)^2 - (bx - d)^2$

$\Rightarrow$ nếu x = $\frac{q}{p} \Rightarrow f(\frac{q}{p}) = -(a.\frac{q}{p} - c)^2 - (b.\frac{q}{p} - d)^2 < 0$

mà $(p^2 - a^2 - b^2) > 0$ nên: $af(\frac{q}{p}) < 0 \Rightarrow$ f(x) có nghiệm $\Rightarrow \Delta' \geq 0 \Rightarrow$ ĐPCM

BÀI TẬP:

5.1. Cho $a^3 > 36$ và abc = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$$

HD: $a^3 > 36 \Rightarrow a > 0$ *và* $abc = 1 \Rightarrow bc = \frac{1}{a}$. Đưa bất đẳng thức về dạng:

$(b + c)^2 - a(b+c) - \frac{3}{a} + \frac{a^2}{3} > 0$ và xét tam thức bậc hai:

$f(x) = x^2 - ax - \frac{3}{a} + \frac{a^2}{3}$

5.2. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Ba số x, y, z thoả mãn điều kiện:

$$ax + by + cz = 0.$$

Chứng minh: $xy + yz + zx \leq 0$

HD: Từ ax + by + cz = 0 và do $c \neq 0$ (vì c >0) nên có $z = -\frac{ax+by}{c}$. Ta viết lại bất đẳng thức dưới dạng sau:

$xy - \frac{ax+by}{c}(x + y) \leq 0$. Biến đổi bđt này về dạng:

$ax^2 + xy(a+ b - c) + by^2 \geq 0$.

Xét tam thức bậc hai:

$f(t) = at^2 + y(a+ b - c)t + by^2$ với a >0.

5.3. Cho a >0 và n là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+...+\sqrt{a}}}}}_{n \text{ dấu căn}} < \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$$

HD: Đặt $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+...+\sqrt{a}}}} = U_n$.

Vì a > 0 nên $U_n > U_{n-1}$. Mặt khác: $U_n^2 = a + U_{n-1}$ suy ra: $U_n^2 < a + U_n$ hay $U_n^2 - U_n + a < 0$. Xét tam thức bậc hai: $f(x) = x^2 - x - a$

5.4. Cho c > b > a > 0.

Đặt $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; P = 4(a + b + c) ; S = 2(ab + bc + ca)

Chứng minh rằng:

$$a < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}P - \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S}\right) < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}P + \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S}\right) < c$$

HD: Xét tam thức bậc hai:

$f(x) = x^2 - \frac{1}{6}Px + \frac{1}{9}\left(\frac{P^2}{16} - d^2 + \frac{1}{2}S\right)$

6. TAM THỨC BẬC HAI VÀ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. Hệ đối xứng kiểu I:

Là hệ phương trình mà nếu đổi vai trò x và y cho nhau thì mỗi phương trình không thay đổi.

Phương pháp giải hệ đối xứng kiểu I là:

Đặt S = x + y, P = xy $\Rightarrow S^2 \geq 4P$

Giải hệ tìm S, P cuối cùng giải phương trình: $X^2 - SX + P = 0$ tìm x, y.

<u>**VD21**</u>: Giải hệ: $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$

Đặt $\sqrt{x} = u \geq 0, \quad \sqrt{y} = v \geq 0$ Hệ trở thành:

$$\begin{cases} u^2v + v^2u = 30 \\ u^3 + v^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PS = 30 \\ S^3 - 3PS = 35 \end{cases} \Rightarrow S = 5, P = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 9 \\ y = 4 \end{cases}$$

<u>**VD22**</u>: Biết (x,y) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = -m^2 + 6 \end{cases}$$

Tìm GTNN, GTLN của biểu thức:

M = xy + 2(x + y)

<u>Giải:</u> Hệ được viết thành:

$\begin{cases} S = m \\ P = m^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow$ x, y là nghiệm của phương trình: $t^2 - mt + m^2 - 3 = 0$ (*)

$\Rightarrow$ Để hệ có nghiệm thì phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow |m| \leq 2$

Khi đó $M = P + 2S = m^2 + 2m - 3$

Bài toán trở thành: Tìm GTLN, GTNN của M trong [-2;2] (Đây là bài toán cơ bản)

M(-2) = -3, M(2) = 5, M(-1) = 4

$\Rightarrow$ MaxM = 5, MinM = -4

Chú ý: HS rất dễ gặp sai lầm là xét M = $m^2 + 2m - 3$ trên R khi đó chỉ có GTNN chứ không có GTLN.

VD23: Cho x, y thoả mãn x + y = 2. Tìm GTNN của

$$F = x^3 + y^3$$

Giải: Bài toán quy về tìm tập giá trị của F Hay:

Tìm F để hệ $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^3 + y^3 = F \end{cases}$ có nghiệm.

Hệ trở thành: $\begin{cases} S = 2 \\ S^3 - 3PS = F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = \dfrac{8-F}{6} \end{cases}$

$\Rightarrow$ x, y là nghiệm cỷa phương trình: $t^2 - 2t + \dfrac{8-F}{6} = 0$ (*)

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow F \geq 2$

$\Rightarrow$ MinF = 2 (khi x = y)

II. Tam thức bậc 2 với phương trình, bất phương trình

VD24: Tìm a sao cho bất đẳng thức:

$$25y^2 + \frac{1}{100} \geq x - axy + y - 25x^2 \qquad (1)$$

được nghiệm đúng $\forall$ cặp (x;y) thoả mãn | x | = | y |

Giải: Ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: x = y (1) $\Rightarrow (a+50)x^2 - 2x + \dfrac{1}{100} \geq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 50 > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 50$

Trường hợp 2: x = -y (1) $\Rightarrow (50 - a)x^2 + \dfrac{1}{100} \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 50$ (3)

Để (1) đúng với $\forall$ (x;y) thì phải thoả mãn cả x = y và x = -y $\Rightarrow$ a = 50

VD25: Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2 - 2x + m \leq 0 & (1) \\ x^2 + 4x - m \leq 0 & (2) \end{cases}$

có nghiệm duy nhất.

Giải: Cộng 2 bất phương trình ta có: $2x^2 + 2x \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0$ (3)

$\Rightarrow$ Nghiệm của hệ phải thoả mãn (3)

Xét các tam thức ở vế trái. Ta có: (1) và (2) có nghiệm $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} \Delta_1' \geq 0 \\ \Delta_2' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m \geq 0 \\ 4 + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 1$

Ta có các khả năng sau:

a) Bpt (1) có nghiệm duy nhất và cũng là nghiệm của (2):
Bpt (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ m = 1 $\Rightarrow$ x = 1 không thoả mãn (3)

b) Bpt (2) có nghiệm duy nhất và cũng là nghiệm của (1):
Bpt (2) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ m = -4 $\Rightarrow$ x = -2 không thoả mãn (3)

c) Bpt (1) $\Leftrightarrow$ $x_1 = 1 - \sqrt{1-m} \le x \le x_2 = 1 + \sqrt{1-m}$
Bpt (2) $\Leftrightarrow$ $x_3 = -2 - \sqrt{4-m} \le x \le x_4 = -2 + \sqrt{4+m}$
Với $-4 < m < 1$

BÀI TẬP:
6.1. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = y \\ ay^2 + by + c = z \\ az^2 + bz + c = x \end{cases}$$

Trong đó: $a \neq 0$ và $(b - 1)^2 - 4ac < 0$. Chứng minh rằng hệ phương trình trên vô nghiệm.

HD: Xét a > 0 (trường hợp a < 0 lý luận tương tự)

Phản chứng, giả sử hệ trên có ngiệm (x_0, y_0, z_0). Khi đó:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = y_0 \\ ay^2 + by + c = z_0 \\ az^2 + bz + c = x_0 \end{cases}$$

Cộng từng vế ba phương trình trên ta có:

$[ax_0^2 + (b-1)x_0 + c] + [ay_0^2 + (b-1)y_0 + c] + [az_0^2 + (b-1)z_0 + c] = 0.$

Xét tam thức: $f(t) = at^2 + (b-1)t + c$ thì $f(x_0) + f(y_0) + f(x_0) = 0$

mà $\Delta = (b - 1)^2 - 4ac < 0$ nên $af(t) > 0$ với mọi t thuộc R từ đó suy ra mâu thuẫn.

6.2. Tìm m sao cho với mọi x cũng đều nghiệm đúng ít nhất một trong hai bất phương trình:

$x^2 + 5m^2 + 8m > 2(3mx + 2)$

$x^2 + 4m^2 \ge m(4x + 1)$

HD: Đưa hai bpt trên về dạng tam thức bậc hai đối với x và xét các khả năng có thể có của các biệt thức Δ_1 và Δ_2

6.3. Gọi L là chiều dài các đoạn nghiệm trên trục số của hệ bpt:

$$-2 \le x^2 + px + q \le 2$$

Chứng minh rằng: $L \le 4$ với mọi p, q

HD: Xét các khả năng của Δ_1 và Δ_2

6.4. Giải và biện luận theo a bpt:

$2x - a\sqrt{x-1} > a - 1$

HD: Đặt $t = \sqrt{x-1} \ge 0$, chuyển về một vế bpt trên và xét tam thức vế trái.

6.5. Cho hai phương trình:

$$x^2 + 3x + 2m = 0$$
$$x^2 + 6x + 5m = 0$$

Tìm m để mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt và giữa hai nghiệm của phương trình này có đúng một nghiệm của phương trình kia.

HD: Sử dụng định lý đảo.

6.6. Tìm m sao cho phương trình:

$$x^4 + mx^3 + x^2 + mx + 1 = 0$$

có không ít hơn 2 nghiệm âm khác nhau.

HD: Nhận xét rằng x = 0 không phải là nghiệm phương trình dù m nhận giá trị nào. Đặt: $t = 1 + \frac{1}{x}$ và xét $f(t) = t^2 + mt - 1$ với $|t| \ge 2$.

6.7. Cho phương trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ (1)

1. Giả sử $|a| > |b| + |c|$. Chứng minh rằng trong khoảng (-1;1) phương trình (1) có hai nghiệm hoặc không có nghiệm nào.

2. Giả sử $|b| > |a| + |c|$. Chứng minh rằng trong khoảng (-1;1) phương trình (1) có đúng 1 nghiệm.

3. Giả sử $|c| > |a| + |b|$. Chứng minh rằng trong khoảng (-1;1) phương trình (1) vô nghiệm.

6.8. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$x^4 + mx^3 + 2mx^2 + m + 1$$

6.9. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{2x^2 - 2(m+4)x + 5m + 10} + 3 - x = 0$$

HD: Để căn thức riêng một vế và biến đổi tương đương.

6.10. Giải và biện luận theo m bpt:

$x - \sqrt{x - m} > 2m$

7. TAM THỨC BẬC HAI VÀ TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ

Trong các bài toán về tương giao đồ thị có sử dụng các kiến thức về tam thức bậc hai là thường các vấn đề sau:

1. Tìm giao điểm của hai đồ thị: Quy về giải hệ phương trình
2. Tìm tiếp tuyến: Điều kiện phương trình có nghiệm kép
3. Tìm quỹ tích: Sử dụng biểu thức giữa các nghiệm của phương trình
4. Chứng minh tính đối xứng (trục, tâm), tính vuông góc.

Tuy nhiên nếu sử dụng thêm các kiến thức về đạo hàm thì ta có các bài toán phức tạp hơn và hay hơn nhiều.

Sau đây ta xét một số ví dụ:

VD26:

Chứng minh rằng đường thẳng: y = -x luôn cắt parabol:

$$y = x^2 - 2(m + 2)x + m^2 + 3m$$

tại 2 điểm phân biệt và khoảng cách giữa 2 điểm đó không phụ thuộc vào m.

Giải: *Hoành độ giao điểm là nghiệm phương trình:*

$$x^2 - 2(m + 2)x + m^2 + 3m = -x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 3m = 0 \quad (*)$$

Ta có: $\Delta = (2m + 3)^2 - 4(m^2 + 3m) = 9 > 0$ nên phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m $\Rightarrow$ đường thẳng luôn cắt parabol tại 2 điểm phân biệt.

Giả sử 2 điểm đó là $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$

Trong đó: $x_A = m$ và $x_B = m + 3$ (m và m + 3 là hai nghiệm của phương trình (*).

$\Rightarrow y_A = - x_A = -m$; $y_B = - x_B = -m - 3$

Ta có: AB = $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ không phụ thuộc m.

VD27:

Cho hàm số: y = $\dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}$ có đồ thị (P).

a). Chứng minh rằng: Đường thẳng (d): y = - x + k luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

b). Tìm k để OA $\perp$ OB

Giải:

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình:

$\frac{x^2 - 2x}{x - 1}$ = - x + k $\Leftrightarrow$ $2x^2 - (k + 3)x + k = 0$ (*)

Dễ thấy x = 1 không phải là nghiệm của (*)

$\Delta = (k - 1)^2 + 8 > 0$ với mọi k nên phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi k $\Rightarrow$ a) được chứng minh.

Mặt khác: Hệ số góc của OA là: a = $\frac{y_A}{x_A} = \frac{-x_A + k}{x_A}$

Hệ số góc của OB là: b = $\frac{y_B}{x_B} = \frac{-x_B + k}{x_B}$

OA $\perp$ OB $\Leftrightarrow$ a.b = -1 $\Leftrightarrow$ $\frac{-x_A + k}{x_A} \cdot \frac{-x_B + k}{x_B} = \frac{x_A.x_B - k(x_A + x_B) + k^2}{x_A.x_B} = -1$ (**)

Theo Vi-ét thì:

$x_A + x_B = \frac{k+3}{2}$; $x_A.x_B = \frac{k}{2}$. Thay vào (**) ta có: k = 1

Vậy: OA $\perp$ OB $\Leftrightarrow$ k = 1

BÀI TẬP:

7.1. Chứng minh rằng: Đường thẳng y = x + 2 là trục đối xứng của đồ thị hàm số: $y = \frac{x-1}{x+1}$

HD: Đường thẳng y = x + 2 là trục đối xứng của đồ thị $y = \frac{x-1}{x+1}$ (P) $\Leftrightarrow$ các đường thẳng vuông góc với đường thẳng y = x + 2 cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm I của AB nằm trên đường thẳng y = x + 2.

7.2. Cho hàm số: $y = \frac{x^2}{x-1}$ có đồ thị (P). Tìm 2 điểm A, B trên đồ thị (P) và đối xứng nhau qua đường thẳng y = x - 1

HD: Tương tự bài 7.1

7.3. Tìm a để đồ thị hàm số: $y = \frac{ax^2 + 3ax + 2a + 1}{x+2}$ tiếp xúc với đường thẳng:

y = a

7.4. Chứng minh rằng đường thẳng y = -x + m luôn cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm m để AB ngắn nhất.

7.5. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai parabol:

$y = x^2 - 5x$ và $y = -x^2 + 3x - 10$

7.6. Tìm các điểm trên trục tung từ đó có thể kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị hàm số $y = x + \frac{1}{x}$ và 2 tiếp tuyến này vuông góc với nhau.

7.7. Tìm m để đường thẳng y = x + m cắt parabol $y = x^2$ tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $OA \perp OB$

7.8. Cho hàm số: $y = \frac{4x - x^2}{x - 1}$ có đồ thị (P)

a). Xác định tiếp tuyến đi qua điểm (1;-4)

b). Chứng minh rằng đường thẳng y = 3x + a luôn cắt đồ thị (P) tại 2 điểm phân biệt A, B. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $d = |x_A - x_B|$