

Đề chính thức

Môn thi: Toán (Vòng 2)

Thời gian: 150 phút

(không kể thời gian giao nhận đề)

**Câu 1.** Tìm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số  $\overline{abc}$  sao cho 
$$\begin{cases} \overline{abc} = n^2 - 1 \\ \overline{cba} = (n - 2)^2 \end{cases}$$

Với  $n$  là số nguyên lớn hơn 2.

**Câu 2.** Tìm nghiệm của phương trình  $x^2 + px + q = 0$ . Biết rằng chúng là số nguyên và  $p + q = 10$ .

**Câu 3.** Giải phương trình:  $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10}) = 3$

**Câu 4.** a) Với  $a, b, c \in \mathbb{N}^*$  chứng minh rằng  $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

b) Cho hai số  $x, y$  thỏa mãn đẳng thức  $8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = 4$

Xác định  $x, y$  để tích  $x \cdot y$  đạt giá trị nhỏ nhất

**Câu 5.** Cho nửa đường tròn (O) đường kính  $AB = 2R$ . M, N là hai điểm trên nửa đường tròn (O) sao cho M thuộc cung AN và tổng khoảng cách từ A, B đến đường thẳng MN bằng  $R\sqrt{3}$

a) Tính độ dài MN theo R

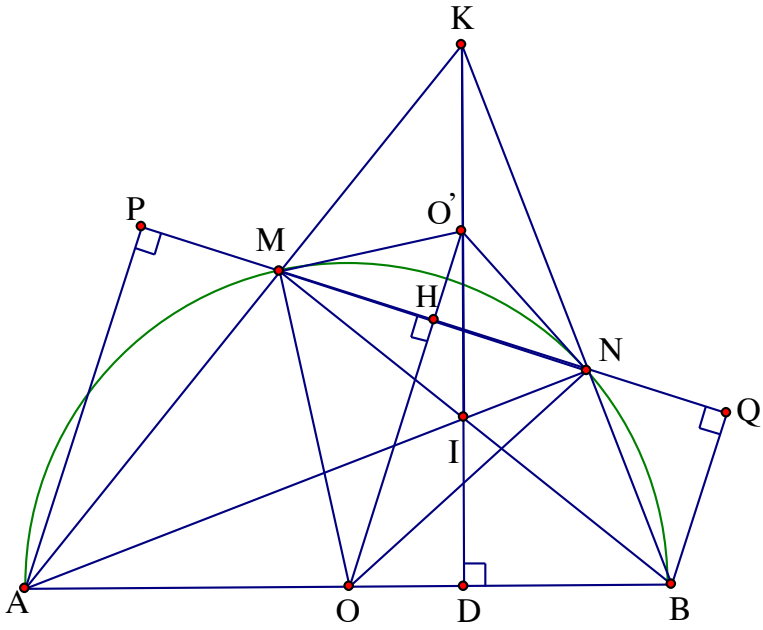
b) Gọi AN cắt BM tại I, AM cắt BN tại K. Chứng minh M, N, I, K cùng thuộc một đường tròn. Tìm bán kính của đường tròn đó.

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác KAB theo R khi M, N thay đổi nhưng vẫn thỏa mãn giả thiết bài toán.

----- Hết -----

## ĐÁP ÁN MÔN TOÁN

Câu	Nội dung đáp án
<p>Câu1 2,5đ</p>	<p>ta có <math>\overline{abc} = 100a + 10b + c = n^2 - 1</math> (1)  <math>\overline{cba} = 100c + 10b + a = n^2 - 4n + 4</math> (2)  từ(1) và (2) ta có <math>99(a - c) = 4n - 5 \Rightarrow 4n - 5 : 99</math> (3)  mặt khác <math>100 \leq n^2 - 1 \leq 999 \Leftrightarrow 101 \leq n^2 \leq 1000</math>  <math>\Leftrightarrow 11 \leq n \leq 31 \Leftrightarrow 39 \leq 4n - 5 \leq 119</math> (4)  từ (3) và (4) <math>\Rightarrow 4n - 5 = 99 \Rightarrow n = 26</math>  Vậy <math>\overline{abc} = n^2 - 1 = 675</math></p>
<p>Câu2 2,5đ</p>	<p>Với giả thiết ph-ong trình đã cho có nghiệm nguyên, gọi nghiệm của nó là <math>x_1, x_2</math> ta có:  <math display="block">\begin{cases} x_1 + x_2 = -p &amp; (1) \\ x_1 \cdot x_2 = q &amp; (2) \end{cases}</math> lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta có <math>x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2 = -(p + q) = -10</math>  <math>\Leftrightarrow x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2 - 1 = -11</math>  <math>\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 11</math> (3)  do <math>x_1, x_2</math> nguyên nên <math>x_1 - 1</math> và <math>x_2 - 1</math> nguyên  nên từ (3) ta có các tr-ờng hợp sau  <math display="block">\begin{cases} x_1 - 1 = 1 \\ x_2 - 1 = 11 \end{cases} \text{ (I)} \quad \begin{cases} x_1 - 1 = 11 \\ x_2 - 1 = 1 \end{cases} \text{ (II)}</math> <math display="block">\begin{cases} x_1 - 1 = -1 \\ x_2 - 1 = -11 \end{cases} \text{ (III)} \quad \begin{cases} x_1 - 1 = -11 \\ x_2 - 1 = -1 \end{cases} \text{ (IV)}</math> Giải các hệ trên ta tìm đ-ợc nghiệm của ph-ong trình có các tr-ờng hợp sau  <math>(x_1, x_2) = (\emptyset; 12), (12; 2), (0; -10), (-10; 0)</math></p>
<p>Câu3 3đ</p>	<p>Nhận xét <math>x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)</math>  ĐK <math>\begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2</math>  nhân hai vế của ph-ong trình đã cho với <math>(\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2}) &gt; 0</math>  ta có  <math>(\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2})(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10}) = 3(\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2})</math>  <math>\Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10} = \sqrt{x+5} + \sqrt{x+2}</math>  <math>\Leftrightarrow \sqrt{x+5} + \sqrt{x+2} - \sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x+2} - 1 = 0</math>  <math>\Leftrightarrow (1 - \sqrt{x+2})(\sqrt{x+5} - 1) = 0</math>  <math>\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{x+2} = 0 \\ \sqrt{x+5} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} = 1 \\ \sqrt{x+5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (TMĐK)} \\ x = -4 \text{ (loại)} \end{cases}</math>  Vậy ph-ong trình đã cho có nghiệm <math>x = -1</math></p>
<p>Câu4 5đ</p>	<p>a) 2,5đ</p> <p>Với <math>a, b, c \in \mathbb{N}^*</math> ta có  <math display="block">\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} &gt; \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{c+a+b} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1</math> mặt khác ta có  <math display="block">\begin{aligned} \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} &amp;= \left(1 - \frac{b}{a+b}\right) + \left(1 - \frac{c}{b+c}\right) + \left(1 - \frac{a}{c+a}\right) \\ &amp;= 3 - \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}\right) \end{aligned}</math> mà <math>\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} &gt; 1</math> (theo cách c/m trên)</p>

		$\Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = 3 - \left( \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) < 3 - 1 = 2$ <p>Vậy ta có <math>1 &lt; \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} &lt; 2</math> (ĐPCM)</p>
	b) 2,5đ	<p>Ta có <math>8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = 4</math></p> $\Leftrightarrow \left( 4x^2 + \frac{1}{4x^2} - 2 \right) + (4x^2 + y^2 + 4xy) - 4xy - 2 = 0$ $\Leftrightarrow 4xy = \left( 2x - \frac{1}{2x} \right)^2 + (2x + y)^2 - 2 \geq -2$ $\Leftrightarrow xy \geq -\frac{1}{2}$ <p>Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi <math>\begin{cases} 2x - \frac{1}{2x} = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}</math></p> $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \text{ hoặc } x = \frac{1}{2} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$ <p>Vậy xy đạt giá trị nhỏ nhất là <math>-\frac{1}{2}</math></p> <p>Khi <math>\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}</math> hoặc <math>\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}</math></p>
Câu 7đ	a) 2,5đ	 <p>Kẻ AP và BQ vuông góc với MN, gọi H là trung điểm của MN  <math>\Rightarrow OH \perp MN</math>      trong hình thang vuông APQB có OH là đ-ờng trung bình nên  <math>OH = \frac{1}{2}(AP + BQ) = \frac{1}{2} \cdot R\sqrt{3} = \frac{R\sqrt{3}}{2}</math>      tam giác MOH vuông tại H, có <math>OM = R</math> và <math>OH = \frac{R\sqrt{3}}{2}</math>      suy ra <math>MH = \frac{R}{2} \Rightarrow MN = R</math> và tam giác MNO đều</p>

<p>b) 2,5đ</p>	<p>Vì <math>\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KMI} = \widehat{KNI} = 90^\circ</math>  <math>\Rightarrow M, K, N, I</math> cùng thuộc một đ-ờng tròn tâm <math>O'</math> là trung điểm của <math>KI</math>.</p> <p>ta có <math>\widehat{AKB} = \frac{1}{2} (\text{sđ cung } AB - \text{sđ cung } MN) = \frac{1}{2} (180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ</math>  <math>\Rightarrow \widehat{MON} = 2 \widehat{AKB} = 120^\circ</math>  mà <math>O'M = O'N</math> (vì <math>O'</math> là tâm đ-ờng tròn ngoại tiếp tứ giác <math>MKNI</math>) và <math>H</math> là trung điểm của <math>MN</math>  <math>\Rightarrow O'H \perp MN</math>  trong tam giác vuông <math>MHO'</math> ta có</p> $MO' = \frac{MH}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ <p>Vậy bán kính đ-ờng tròn đi qua <math>M, K, N, I</math> là <math>\frac{R\sqrt{3}}{3}</math></p>
<p>c) 2đ</p>	<p>Điểm <math>K</math> luôn nằm trên cung chứa góc <math>60^\circ</math> dựng trên đoạn <math>AB = 2R</math>  <math>\Rightarrow</math> Diện tích tam giác <math>KAB</math> lớn nhất <math>\Leftrightarrow</math> đ-ờng cao <math>KD</math> lớn nhất <math>\Leftrightarrow</math> tam giác <math>KAB</math> đều  khi đó tam giác <math>KDB</math> vuông tại <math>D</math>, có <math>BD = BO = R</math>  <math>KB = AB = 2R</math>  <math>\Rightarrow KD = \sqrt{KB^2 - BD^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3}</math>  Vậy diện tích lớn nhất của tam giác <math>KAB</math> là  <math>\frac{1}{2} KD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot R\sqrt{3} \cdot 2R = R^2\sqrt{3}</math></p>