CHUYÊN ĐỀ. NGUYÊN LÍ ĐI RICLE

I. Mục tiêu

– Hiểu được nguyên lí Diricle thông qua các ví dụ cụ thể
– Áp dụng thành thạo nguyên lí Diricle vào việc giải các bài toán thực tế
– Rèn luyện tư duy suy luận logic

II. Nội dung

Tiết 1

Nguyên lí: ***không thể nhốt 7 chú thỏ vào 3 cái lồng sao cho mỗi lồng không quá hai chú thỏ***

1. Sự trùng lặp

Bài 1. Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra, không có ai bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên)

Giải: Có 43 học sinh phân thành 8 loại điểm (từ 2 đến 9). Giả sử trong 8 loại điểm đều là điểm của không quá 5 học sinh thì lớp học có $5 \times 8 = 40$ học sinh, ít hơn 3 học sinh. Theo nguyên lý Diricle tồn tại 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau

Bài 2. Một trường học có 1000 học sinh gồm 23 lớp. Chứng minh rằng phải có ít nhất một lớp có từ 44 học sinh trở lên

Giải: Giả sử 23 lớp mỗi lớp có không quá 43 học sinh. Khi đó số học sinh là: $43 \times 23 = 989$ học sinh (ít hơn $1000 – 989 = 11$ học sinh). Theo nguyên tắc Diricle phải có ít nhất một lớp có từ 44 học sinh trở lên

Bài 3. Một lớp có 50 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 5 học sinh có tháng sinh giống nhau

Giải: 50 học sinh là 50 "thỏ". 12 tháng là 12 "lồng"

Bài 4. Một lớp học có 50 học sinh, có duy nhất một học sinh thiếu nhiều bài tập nhất là thiếu 3 bài tập. Chứng minh rằng tồn tại 17 học sinh thiếu 1 số bài tập như nhau (trường hợp không thiếu bài tập coi như thiếu 0 bài)

Giải: Giả sử mỗi loại bài tập có 16 học sinh. Số học sinh không quá $16 \times 3 = 48$ (thiếu 2 học sinh). Do đó, theo nguyên tắc Diricle có ít nhất 17 học sinh thiếu một số bài tập như nhau

Tiết 2

Bài 5. Một lớp học có 34 học sinh, tổng số tuổi của các học sinh là 460. Có tồn tại 20 học sinh mà tổng số tuổi của họ lớn hơn 260 không?

Giải: Có, giả sử 20 học sinh lớn tuổi nhất lớp có tổng số tuổi không quá 260 $\Rightarrow$ tồn tại 1 học sinh trong số đó có tuổi không quá: $260 : 20 = 13$

14 học sinh còn lại cũng không quá 13 tuổi nên tổng số tuổi của họ không quá $13 \times 14 = 192$

Suy ra, tổng số tuổi không quá: $260 + 192 = 452 < 460$ (trái giả thiết)

Vậy: phải tồn tại 20 học sinh mà tổng số tuổi của họ lớn hơn 260

Bài 6. Bốn lớp 6A, 6B, 6C, 6D có tất cả 44 học sinh giỏi, trong đó số học sinh giỏi của lớp 6D không quá 10 người. Chứng minh rằng ít nhất một trong 3 lớp 6A, 6B, 6C có số học sinh giỏi từ 12 em trở lên

Giải: 3 lớp có $44 – 10 = 34$ học sinh giỏi $\Rightarrow$ có 34 "thỏ" mỗi "lồng" có 11 học sinh

Bài 7. Chia 50 kẹo cho 10 em bé (em nào cũng được chia kẹo). Chứng minh rằng dù chia cách nào cũng tồn tại hai em có số kẹo bằng nhau

Giải: Giả sử không ai có số kẹo bằng nhau, thế thì 10 em sẽ có số kẹo là 1, 2, ..., 10. Khi đó tổng số kẹo phải là: $1 + 2 + 3 + ... + 10 = 55$ (thiếu 5 cái). Theo nguyên tắc Diricle thì tồn tại ít nhất có hai em có số kẹo như nhau

Bài 8. Có 33 con chim đậu trên một sân vuông hình vuông cạnh 4m. Chứng minh rằng có ít nhất 3 con đậu trong một đường tròn có bán kính 1m

Giải: Chia hình vuông ra 16 hình vuông nhỏ cạnh 1m. Có 16 hình vuông chứa 33 con chim. Theo nguyên tắc Diricle có ít nhất 3 con chim đậu bên trong hoặc trên cạnh của nó. Vẽ đường tròn thì đường tròn chứa hoàn toàn hình vuông nhỏ

Tiết 3

2. Sự chia hết

Bài 1. Cho 12 số tự nhiên khác nhau có 2 chữ số. Chứng minh rằng tồn tại 2 số có hiệu là một số có hai chữ số như nhau

<u>Giải:</u> Có 12 số tự nhiên khác nhau, mà chỉ có 11 số dư trong phép chia cho 11. Do đó tồn tại 2 số có cùng số dư trong phép chia cho 11, hiệu của chúng là một số chia hết cho 11. Đó là số có hai chữ số giống nhau

Bài 2. Chứng minh rằng tồn tại một số là bội số của 17:

a) Gồm toàn chữ số 1 và 0

b) Gồm toàn chữ số 1

<u>Giải:</u> a) Xét 18 số 1, 11, 111, ..., $\underbrace{11.....1}_{18}$. Có 18 số, mà trong phép chia cho 17 chỉ gồm 17 số dư (0, 1, 2, 3, ..., 16) nên tồn tại hai số có cùng số dư. Giả sử hai số đó là $\underbrace{11...1}_{m}$; $\underbrace{11...1}_{n}$ $(0 \le n \le m \le 17)$.

Hiệu của chúng bằng $\underbrace{11...1}_{m-n}\underbrace{00...0}_{n}$ chia hết cho 17

Vậy: Tồn tại số gồm toàn chữ số 1 và 0 là bội số của 17

b) Theo câu a) thì tồn tại số: $\underbrace{11...1}_{m-n}\underbrace{00...0}_{n} = \underbrace{11...1}_{m-n} \times 10^n \,\vdots\, 17$. Mà $(10^n, 17) = 1 \Rightarrow \underbrace{11...1}_{m-n} \,\vdots\, 17$

<u>Chú ý:</u> Tổng quát, trong câu a) có thể thay 17 bằng một số tự nhiên n bất kì, trong câu b) có thể thay 17 bằng một số tự nhiên n nguyên tố cùng nhau với 2 và 5 (tức là các số có tận cùng bằng 1; 3; 7; 9)

Bài 3. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên k sao cho 3^k tận cùng bằng 001

<u>Giải:</u> Trong phép chia cho 1000 có 1000 số dư là 0, 1, 2, 3, ..., 999

Xét 1001 số 3, 3^2, 3^3, ..., 3^{1001}. Tồn tại 2 số có cùng số dư trong phép chia cho 1000, giả sử hai số đó là 3^m và 3^n $(0 \le n \le m \le 1000) \Rightarrow 3^m - 3^n \,\vdots\, 1000 \Leftrightarrow 3^n(3^{m-n} - 1) \,\vdots\, 1000$

Vì $(3^n, 1000) = 1 \Rightarrow 3^{m-n} - 1 \,\vdots\, 1000$. Tức là 3^{m-n} có tận cùng là 001

Bài 4. Viết 20 số tự nhiên vào 20 tấm bìa. Chứng minh rằng ta có thể chọn 1 hay nhiều tấm bìa để tổng các số trên đó chia hết cho 20

Xét 20 tổng: $S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

....

$S_3 = a_1 + a_2 + ... + a_{20}$

Nếu một trong các tổng trên chia hết cho 20. Bài toán đã giải xong

Nếu không tồn tại tổng nào chia hết cho 20. Xét 20 tổng trên khi chia cho 20, có 20 tổng mà chỉ có 19 số dư (1, 2, ..., 19). Suy ra có 2 tổng có cùng một số dư, giả sử hai tổng đó là S_m, S_n

$\Rightarrow S_m - S_n = (a_1 + a_2 + ... + a_m) - (a_1 + a_2 + ... + a_n) = a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_m \,\vdots\, 20$

III. Hướng dẫn học ở nhà

Ôn tập các nội dung đã học

****

CHUYÊN ĐỀ. NGUYÊN LÍ ĐI RICLE

I. Mục tiêu

– Biết cách giải một số dạng toán có sự áp dụng của nguyên lí Diricle
– Áp dụng thành thạo nguyên lí Diricle vào việc giải các bài toán thực tế
– Rèn luyện tư duy suy luận logic

II. Nội dung

Tiết 1

Bài 5. Anh Nam là một vận động viên chơi cờ, để luyện tập mỗi ngày anh chơi ít nhất một ván, để khỏi mệt mỗi tuần anh chơi không quá 20 ván. Chứng minh rằng tồn tại một số ngày liên tiếp trong đó có anh chơi đúng 20 ván

Giải: Gọi số ván cờ mà anh Nam chơi ngày thứ nhất, thứ hai, ... thứ 20 là $a_1, a_2, ..., a_{20}$

Xét 20 tổng: $S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
....
$S_{20} = a_1 + a_2 + ... + a_{20}$

Ta có: $S_1 < S_2 < ... < S_{20} < 36$ (vì trong 20 ngày anh Nam chơi ít hơn $12\times3 = 36$ ván)

Theo bài 4, thì $S_k \vdots 20$ hoặc $S_m - S_n \vdots 20$ ($1 \le k \le 20$, $1 \le n \le m \le 20$). Giá trị này bằng 20

– Nếu $S_k = 20$ tức là: $a_1 + a_2 + ... + a_k = 20$

– Nếu $S_m - S_n \vdots 20$ thì: $a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_m = 20$

Bài 6. Chứng minh rằng tồn tại một bội số của 23 gồm toàn chữ số 4

Giải: Xét 23 số 4, 44, 444, ... , $\underbrace{44...4}_{24}$. Có 23 số có số dư khi chia cho 23 có 23 số dư (0, 1, 2, ..., 22)

– Nếu có số dư bằng 0, bài toán giải xong

– Nếu không có số dư nào bằng 0 thì 23 số có 22 số dư (1, 2, ..., 22) nên tồn tại ít nhất hai số có cùng một số dư ⇒ có hiệu chia hết cho 23. Giả sử hai số đó là:

$$\underbrace{44...4}_{m} - \underbrace{44...4}_{n} = \underbrace{44...4}_{m-n}\underbrace{00...0}_{n} \vdots 23$$

Mà $(10^n, 23) = 1$ nên: $\underbrace{44...4}_{m-n} \vdots 23$

Bài 7. Tồn tại một bội số của 17 tận cùng bằng 219

Giải: Xét 18 số 219, 219219, ..., $\underbrace{219219...219}_{18\text{ số }219}$. Có 18 số mà số dư của phép chia cho 17 có 17 số dư 0, 1, 2, ..., 16. Tồn tại ít nhất hai số có cùng một số dư:

$$\underbrace{219219...219}_{m\text{ số }219} - \underbrace{219219...219}_{n\text{ số }219} = \underbrace{219219...219}_{m-n\text{ số }219}\underbrace{000000...000}_{n\text{ số }000} = \underbrace{219219...219}_{m-n\text{ số }219} \times 10^{3n} \vdots 17$$

Mà $(10^n, 17) = 1$. Suy ra: $\underbrace{219219...219}_{m-n\text{ số }219} \vdots 17$

Bài 8. Cho ba số tự nhiên bất kì. Chứng minh rằng:

a) Tồn tại ít nhất hai số có hiệu chia hết cho 2
b) Tồn tại hai số có tổng chia hết cho 2

Tiết 2

Bài 9. Cho 5 số tự nhiên bất kì. Chứng minh rằng:

a) Tồn tại hai số có hiệu chia hết co 4
b) Tồn tại 3 số có tổng chia hết cho 3

Giải: b) Có 5 số tự nhiên bất kì, có ba số dư là 0, 1, 2 khi chia cho 3.

– Nếu 3 số có cùng số dư thì tổng chia hết cho 3

– Nếu không có 3 số nào có cùng số dư (tức là có 3 số dư khác nhau là 0, 1, 2) thì tổng của chúng có số dư là $0 + 1 + 2 \vdots 3$

Bài 10. Cho ba số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng trong ba số đó tồn tại hai số mà tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 12

Giải: Một số nguyên tố lớn hơn 3 chia cho 12 có số dư 1, 5, 7, 11

Xếp 3 số nguyên tố đã cho vào hai nhóm:

– Nhóm I gồm các số có số dư 1 hoặc 11

– Nhóm II gồm các số có số dư 5 hoặc 7

Nếu hai số có cùng số dư thì hiệu của chúng chia hết cho 12

Nếu hai số này có số dư khác nhau thì tổng của chúng chia hết cho 12

3. Sự tương hỗ

Bài 1. Chứng minh rằng trong 10 người bất kì, tồn tại hai người có số người quen như nhau

Giải: Xét 10 "lồng":

– Lồng "0" chứa những người có 0 người quen

– Lồng "1" chứa những người có 1 người quen

....

– Lồng "9" chứa những người có 9 người quen

Chú ý: "lồng" 0 và "lồng" 9 không thể đồng thời chứa người, vì nếu lồng 0 tồn tại (không quen những người khác) thì lồng 9 không thể tồn tại

Thực tế chỉ có 9 lồng lại có 10 người nên theo nguyên lý Diricle tồn tại ít nhất một "lồng" chứa 2 chứa 2 người trở lên. Đó là 2 người có số người quen như nhau

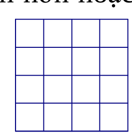
Bài 2. Có 5 đấu thủ thi cờ, mỗi người đấu 1 trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu luôn tồn tại 2 đấu thủ có số trận đấu bằng nhau

Giải: Xét 5 "lồng" 0, 1, 2, 3, 4 thứ tự chứa các đấu thủ đã đấu 0, 1, 2, 3 trận (chú ý là lồng 0 và lồng 4 không thể cùng một lúc tồn tại). Như vậy chỉ có 4 "lồng" mà có 5 người nên tồn tại ít nhất 2 đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau

***Chú ý:** Bài 1 và bài 2 cũng đúng nếu thay 10 (hay 5) bởi một số tự nhiên n bất kì lớn hơn 1*

4. Sự sắp xếp

Bài 1. Cho một bảng vuông 4×4 trên 16 ô của bảng, ta đặt 16 số tự nhiên từ 1 đến 16. Chứng minh rằng tồn tại hai ô kề nhau (tức là hai ô có cạnh chung sao cho hiệu các số ở hai ô đó lớn hơn hoặc bằng 3



Giải: Giả sử tất cả các bước chuyển đều nhỏ hơn hoặc bằng 2. Thế thì từ số 1 qua không quá 6 bước chuyển tăng thêm không quá 12 (không đạt đến 16)

Vậy: tồn tại hai ô kề nhau có hiệu các số có ở hai ô đó lớn hơn hoặc bằng 3

Bài 2. Viết 16 số mỗi số có giá trị bất kì là 1, 2, 3, 4. Ghép thành từng cặp hai số được 8 cặp số. Chứng minh rằng tồn tại hai cặp số mà tổng các số trong hai cặp đó bằng nhau

Giải: Tổng hai số mỗi cặp trong 8 cặp số có giá trị nhỏ nhất là $1 + 1 = 2$, có giá trị lớn nhất là $4 + 4 = 8$. Như vậy: 8 tổng đó nhận 7 giá trị (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) nên tồn tại ít nhất hai cặp có tổng bằng nhau

Bài 3. Cho 64 ô vuông xếp thành một hàng ngang. Viết vào mỗi ô một số bất kì từ 1 đến 16. Ghép thành từng cặp hai ô đầu và cuối, các ô cách đều 2 ô đầu và cuối. Chứng minh rằng tồn tại hai cặp có tổng các số ở 2 ô trong mỗi cặp bằng nhau

Giải: Tổng hai số mỗi cặp trong 32 cặp số có giá trị nhỏ nhất là $1 + 1 = 2$ và giá trị lớn nhất là $16 + 16 = 32$. Như vậy 32 tổng nhận 31 giá trị (2, 3, ..., 32) nên tồn tại ít nhất hai tổng bằng nhau. Tức là hai cặp có tổng bằng nhau

III. Hướng dẫn học ở nhà

Ôn tập các nội dung đã học

****