1. Chuyên đề : Đa thức

Bài 1: Tính giá trị của biểu thức:

a. A = $x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20$ tại x = 16.

b. B = $x^5 - 15x^4 + 16x^3 - 29x^2 + 13x$ tại x = 14.

c. C = $x^{14} - 10x^{13} + 10x^{12} - 10x^{11} + ... + 10x^2 - 10x + 10$ tại x = 9

d. D = $x^{15} - 8x^{14} + 8x^{13} - 8x^{12} + ... - 8x^2 + 8x - 5$ tại x = 7.

Bài 2: Tính giá trị của biểu thức:

a. M = $2\frac{1}{315}.\frac{1}{651} - \frac{1}{105}.3\frac{650}{651} - \frac{4}{315.651} + \frac{4}{105}$

b. N = $2\frac{1}{547}.\frac{3}{211} - \frac{546}{547}.\frac{1}{211} - \frac{4}{547.211}$

Bài 3: Tính giá trị của biểu thức:

a. A = $x^3\left(x^2 - y^2\right) + y^2\left(x^3 - y^3\right)$ với x = 2; $|y| = 1$.

b. M.N với $|x| = 2$.Biết rằng:M = $-2x^2 + 3x + 5$; N = $x^2 - x + 3$.

Bài 4: Tính giá trị của đa thức, biết x = y + 5:

a. $x(x+2) + y(y-2) - 2xy + 65$

b. $x^2 + y(y - 2x) + 75$

Bài 5: Tính giá trị của đa thức:

$x(1+y) - y(xy-1) - x^2y$ biết x+ y = -p, xy = q

Bài 6: Chứng minh đẳng thức:

a. $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = ab + bc + ca - x^2$; biết rằng 2x = a + b + c

b. $2bc + b^2 + c^2 - a^2 = 4p(p-a)$; biết rằng a + b + c = 2p

Bài 7:

a. Số a gồm 31 chữ số 1, số b gồm 38 chữ số 1. Chứng minh rằng ab – 2 chia hết cho 3.

b. Cho 2 số tự nhiên a và b trong đó số a gồm 52 số 1, số b gồm 104 số 1. Hỏi tích ab có chia hết cho 3 không? Vì sao?

Bài 8: Cho a + b + c = 0. Chứng minh rằng M = N = P với:

$M = a(a+b)(a+c)$; $N = b(b+c)(b+a)$; $P = c(c+a)(c+b)$

Bài 9: Cho biểu thức: M = $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + x^2$. Tính M theo a, b, c, biết rằng $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$.

Bài 10: Cho các biểu thức: A = 15x – 23y ; B = 2x + 3y . Chứng minh rằng nếu x, y là các số nguyên và A chia hết cho 13 thì B chia hết cho 13. Ngược lại nếu B chia hết cho 13 thì A cũng chia hết cho 13.

Bài 11: Cho các biểu thức: A = 5x + 2y ; B = 9x + 7y

a. Rút gọn biểu thức 7A – 2B.

b. Chứng minh rằng: Nếu các số nguyên x, y thỏa mãn 5x + 2y chia hết cho 17 thì 9x + 7y cũng chia hết cho 17.

Bài 12: Chứng minh rằng:

a. $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ chia hết cho 405.

b. $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ chia hết cho 133.

Bài 13: Cho dãy số 1, 3, 6 , 10, 15,..., $\frac{n(n+1)}{2}$, ...

Chứng minh rằng tổng hai số hạng liên tiếp của dãy bao giờ cũng là số chính phương.

2. Chuyên đề: Biến đổi biểu thức nguyên

I. Một số hằng đẳng thức cơ bản

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
   $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$;
   $(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 =$
$= a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_1a_n + a_2a_3 + ... + a_2a_n + ... + a_{n-1}a_n)$;
2. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$;
   $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$;
3. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
   $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
   $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$;
4. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
   $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^5)$;
$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a + b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \ldots + a^2b^{2k-2} - ab^{2k-1} + b^{2k})$;

II. Bảng các hệ số trong khai triển $(a + b)^n$ – Tam giác Pascal

Đỉnh						1					
Dòng 1 (n = 1)					1		1				
Dòng 2 (n = 2)				1		2		1			
Dòng 3 (n = 3)			1		3		3		1		
Dòng 4 (n = 4)		1		4		6		4		1	
Dòng 5 (n = 5)	1		5		10		10		5		1

Trong tam giác này, hai cạnh bên gồm các số 1 ; dòng k + 1 được thành lập từ dòng k ($k \geq 1$), chẳng hạn ở dòng 2 ta có 2 = 1 + 1, ở dòng 3 ta có 3 = 2 + 1, 3 = 1 + 2, ở dòng 4 ta có 4 = 1 + 3, 6 = 3 + 3, 4 = 3 + 1, …Khai triển $(x + y)^n$ thành tổng thì các hệ số của các hạng tử là các số trong dòng thứ n của bảng trên. Người ta gọi bảng trên là tam giác Pascal, nó thường được sử dụng khi n không quá lớn. Chẳng hạn, với n = 4 thì :

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

và với n = 5 thì :

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 10ab^4 + b^5$$

3. Chuyên đề: Phân tích đa thức thành nhân tử

II. Các ví dụ

Ví du 1. Đơn giản biểu thức sau :

$$A = (x + y + z)^3 – (x + y – z)^3 – (y + z – x)^3 – (z + x – y)^3.$$

Lời giải

$A = [(x + y) + z]^3 – [(x + y) – z]^3 – [z – (x – y)]^3 – [z + (x – y)]^3$

$= [(x + y)^3 + 3(x + y)^2z + 3(x + y)z^2 + z^3] – [(x + y)^3 – 3(x + y)^2z + 3(x + y)z^2 – z^3] – [z^3 – 3z^2(x – y) + 3z(x – y)^2 – (x – y)^3] – [z^3 + 3z^2(x – y) + 3z(x – y)^2 + (x – y)^3]$

$= 6(x + y)^2z – 6z(x – y)^2 = 24xyz$

Ví du 2. Cho $x + y = a$, $xy = b$ ($a^2 \geq 4b$). Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $x^2 + y^2$; b) $x^3 + y^3$; c) $x^4 + y^4$; d) $x^5 + y^5$

Lời giải

a) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 – 2xy = a^2 – 2b$

b) $x^3 + y^3 = (x + y)^3 – 3xy(x + y) = a^3 – 3ab$

c) $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 – 2x^2y^2 = (a^2 – 2b)^2 – 2b^2 = a^4 – 4a^2b + 2b^2$

d) $(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = x^5 + x^2y^3 + x^3y^2 + y^5 = (x^5 + y^5) + x^2y^2(x + y)$

Hay : $(a^2 – 2b)(a^3 – 3ab) = (x^5 + y^5) + ab^2 \Rightarrow x^5 + y^5 = a^5 – 5a^3b + 5ab^2$

Chú ý : $a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^3)^2 + (b^3)^2$

$a^7 + b^7 = (a^3 + b^3)(a^4 + b^4) – a^3b^3(a + b)$

$= (a^2 + b^2)(a^5 + b^5) – a^2b^2(a^3 + b^3)$

Ví dụ 3. Chứng minh các hằng đẳng thức :

a) $a^3 + b^3 + c^3 – 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 – ab – bc – ca)$;

b) $(a + b + c)^3 – a^3 – b^3 – c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$

Lời giải

a) $a^3 + b^3 + c^3 – 3abc = (a + b)^3 + c^3 – 3abc – 3a^2b – 3ab^2$

$= (a + b + c)[(a + b)^2 – (a + b)c + c^2] – 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c) [(a + b)^2 – (a + b)c + c^2 – 3ab]$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 – ab – bc – ca)$

b) $(a + b + c)^3 – a^3 – b^3 – c^3 = [(a + b + c)^3 – a^3] – (b^3 + c^3)$

$= (b + c)[(a + b + c)^2 + (a + b + c)a + a^2] – (b + c)(b^2 – bc + c^2)$

$= (b + c)(3a^2 + 3ab + 3bc + 3ca) = 3(b + c)[a(a + b) + c(a + b)]$

$= 3(a + b)(b + c)(c + a)$

Ví du 4. Cho $x + y + z = 0$.

Chứng minh rằng : $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Lời giải

Vì $x + y + z = 0$ nên $x + y = –z \Rightarrow (x + y)^3 = –z^3$

Hay $x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = –z^3 \Rightarrow 3xyz = x^3 + y^3 + z^3$

Do đó : $3xyz(x^2 + y^2 + z^2) = (x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2)$

$= x^5 + y^5 + z^5 + x^3(y^2 + z^2) + y^3(z^2 + x^2) + z^3(x^2 + y^2)$

Mà $x^2 + y^2 = (x + y)^2 – 2xy = z^2 – 2xy$ (vì $x + y = –z$). Tương tự :

$y^2 + z^2 = x^2 – 2yz$; $z^2 + x^2 = y^2 – 2zx$.

Vì vậy : $3xyz(x^2 + y^2 + z^2) = x^5 + y^5 + z^5 + x^3(x^2 – 2yz) + y^3(y^2 – 2zx) + z^3(z^3 – 2xy) = 2(x^5 + y^5 + z^5) – 2xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Suy ra : $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$ (đpcm)

Bài tập:

1. Cho $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 14$.

Tính giá trị của biểu thức : $A = a^4 + b^4 + c^4$.

2. Cho $x + y + z = 0$ và $xy + yz + zx = 0$. Tính giá trị của biểu thức :

$$B = (x - 1)^{2007} + y^{2008} + (z + 1)^{2009}.$$

3. Cho $a^2 - b^2 = 4c^2$. Chứng minh rằng : $(5a - 3b + 8c)(5a - 3b - 8c) = (3a - 5b)^2$.
4. Chứng minh rằng nếu:
5. $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = (x + y - 2z)^2 + (y + z - 2x)^2 + (z + x - 2y)^2$

thì $x = y = z$.

6. a) Chứng minh rằng nếu $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$ và x, y khác 0 thì $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

b) Chứng minh rằng nếu $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$

và x, y, z khác 0 thì $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

7. Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng :
   a) $5(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) = 6(x^5 + y^5 + z^5)$;
   b) $x^7 + y^7 + z^7 = 7xyz(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$;
   c) $10(x^7 + y^7 + z^7) = 7(x^2 + y^2 + z^2)(x^5 + y^5 + z^5)$.

8. Chứng minh các hằng đẳng thức sau :
   a) $(a + b + c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$;
   b) $x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$.

9. Cho các số a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + (a + b)^2 = c^2 + d^2 + (c + d)^2$.
   Chứng minh rằng : $a^4 + b^4 + (a + b)^4 = c^4 + d^4 + (c + d)^4$

10. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$.

    Tính giá trị của biểu thức : $C = a^2 + b^9 + c^{1945}$.

11. Hai số a, b lần lượt thỏa mãn các hệ thức sau :

    $a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0$ và $b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0$. Hãy tính : $D = a + b$.

12. Cho $a^3 - 3ab^2 = 19$ và $b^3 - 3a^2b = 98$. Hãy tính : $E = a^2 + b^2$.

13. Cho $x + y = a + b$ và $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Tính giá trị của các biểu thức sau :
    a) $x^3 + y^3$;   b) $x^4 + y^4$;   c) $x^5 + y^5$;   d) $x^6 + y^6$;
    e) $x^7 + y^7$;   f) $x^8 + y^8$;   g) $x^{2008} + y^{2008}$.

I- Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử khác:

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$a,\ x^2-5x+6$ $\quad$ d, $x^2-13x+36$

$b,\ 3x^2-8x+4$ $\quad$ e, $x^2+3x-18$

$c,\ x^2+8x+7$ $\quad$ f, $x^2-5x-24$

$g, 3x^2-16x+5$ $\quad$ h, $8x^2+30x+7$

$i,\ 2x^2-5x-12$ $\quad$ k, $6x^2-7x-20$

Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1, x^3-5x^2+8x-4 $\quad$ 2, x^3+2x-3

3, x^3+5x^2+8x+4 $\quad$ 4, x^3-7x+6

5, $x^3-9x^2+6x+16$ $\quad$ 6, $4x^3-13x^2+9x-18$

7, x^3-4x^2-8x+8 $\quad$ 8, $-\ x^3-6x^2+6x+1$

9, $6x^3-x^2-486x+81$ $\quad$ 10, x^3-7x-6

11, x^3-3x+2 $\quad$ 12, x^3-5x^2+3x+9

13, $x^3+8x^2+17x+10$ $\quad$ 14, x^3+3x^2+6x+4

15, x^3-2x-4 $\quad$ 16, $2x^3-12x^2+17x-2$

17, x^3+x^2+4 $\quad$ 18, x^3+3x^2+3x+2

19, $x^3+9x^2+26x+24$ $\quad$ 20, $2x^3-3x^2+3x-1$

21, $3x^3-14x^2+4x+3$ $\quad$ 22, $x^4+2x^3+x^2+x+1$

(Đa thức đã cho có nhiệm nguyên hoặc nghiệm hữu tỉ)

II- Phương pháp thêm và bớt cùng một hạng tử

1) **Dạng 1**: ***Thêm bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện hằng đẳng thức hiệu của hai bình phương: $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$***

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1, $(1+x^2)^2-4x(1-x^2)$ $\quad$ 2, $\left(x^2-8\right)^2+36$

3, x^4+4 $\quad$ 4, x^4+64

5, $64x^4+1$ $\quad$ 6, $81x^4+4$

7, $4x^4+81$ $\quad$ 8, $64x^4+y^4$

9, x^4+4y^4 $\quad$ 10, x^4+x^2+1

2) **Dạng 2**: ***Thêm bớt cùng một hạng tử làm xuất hiện thừa số chung***

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$1, x^7+x^2+1$ $\quad$ $2, x^7+x^5+1$

$3, x^5+x^4+1$ $\quad$ $4, x^5+x+1$

$5, x^8+x^7+1$ $\quad$ $6, x^5-x^4-1$

$7, x^5+x-1$ $\quad$ $8, x^{10}+x^5+1$

III- Phương pháp đổi biến

Bài 1:Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$1, x(x+4)(x+6)(x+10)+128$ $\quad$ $2, (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

$3, (x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$ $\quad$ $4, (x^2+x)^2+4x^2+4x-12$

$5, x^2+2xy+y^2+2x+2y-15$ $\quad$ $6, (x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$

$7, 6x^4-11x^2+3$ $\quad$ $8, (x^2+x)^2+3(x^2+x)+2$

$9, x^2-2xy+y^2+3x-3y-10$ $\quad$ $10, (x^2+2x)^2+9x^2+18x+20$

$11, x^2-4xy+4y^2-2x+4y-35$ $\quad$ $12, (x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+16$

Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

$1, x^4+6x^3+7x^2-6x+1$

$2, (x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)^2$

IV- Phương pháp xét giá trị riêng

Phương pháp: Trước hết ta xác định dạng các thừa số chứa biến của đa thức, rồi gán cho các biến các giá trị cụ thể để xác định thừa số còn lại.

Ví dụ: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$a,\ P=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$$

$$b,\ Q=a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+(a+b-c)\ (b+c-a)(c+a-b)$$

Giải

a, Giả sử thay x bởi y thì P = $y^2(y-z)+y^2(z-y)=0$

Như vậy P chứa thừa số x – y

Ta lại thấy nếu thay x bởi y, thay y bởi z, thay z bởi x thì P không đổi(ta nói đa thức P có thể hoán vị vòng quanh bởi các biến x, y, z). Do đó nếu P đã chúa thùa số x – y thì cũng chúa thừa số y – z, z – x. Vậy P phải có dạng

P = k(x – y)(y – z)(z – x).Ta thấy k phải là hằng số(không chúa biến) vì P có bậc 3 đối với tập hợp các biến x, y, z còn tích (x – y)(y – z)(z – x) cũng có bậc ba đối với tập hợp các biến x, y, z. Vì đẳng thức

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=k(x-y)(y-z)(z-x)$$

đúng với mọi x, y, z nên ta gán cho các biến x, y, z các giá trị riêng, chẳng hạn x = 2, y = 1, z = 0

ta được k = -1

Vậy P =- (x – y)(y – z)(z – x) = (x – y)(y – z)(x - z)

Các bài toán

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$M = a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 + (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

$N = a(m-a)^2 + b(m-b)^2 + c(m-c)^2 - abc$, với 2m = a+ b + c.

Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$a) A = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc.$

$b) B = a(a+2b)^3 - b(2a+b)^3.$

$c) C = ab(a+b) - bc(b+c) + ac(a-c).$

$d) D = (a+b)(a^2-b^2) + (b+c)(b^2-c^2) + (c+a)(c^2-a^2)$

$e) E = a^3(c-b^2) + b^3(a-c^2) + c^3(b-a^2) + abc(abc-1).$

$f) f = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3.$

$g) G = a^2b^2(a-b) + b^2c^2(b-c) + a^2c^2(c-a).$

$h) H = a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b).$

V-Phương pháp hệ số bất định

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$a) A = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3$

$b) B = 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$

$c) C = 3x^2 + 22xy + 11x + 37y + 7y^2 + 10$

$d) D = x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1$

$e) E = x^4 - 8x + 63$

Bài tập:

Ví dụ . Phân tích biểu thức sau thành nhân tử :

$$A = x^3 – 3(a^2 + b^2)x + 2(a^3 + b^3)$$

Lời giải

Đặt S = a + b và P = ab, thì $a^2 + b^2 = S^2 - 2P$; $a^3 + b^3 = S^3 - 3SP$. Vì vậy :

$A = x^3 – 3(S^2 - 2P)x + 2(S^3 - 3SP) = (x^3 - S^3) - (3S^2x - 3S^3) + (6Px - 6SP)$

$= (x - S)(x^2 + Sx + S^2) - 3S^2(x - S) + 6P(x - S)$

$= (x - S)(x^2 + Sx - 2S^2 + 6P)$

$= (x – a – b)[x^2 + (a + b)x – 2(a + b)^2 + 6ab]$

$= (x – a – b)[x^2 + (a + b)x – 2(a^2$

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^3 + 4x^2 – 29x + 24$;
b) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 – 6x + 1$;
c) $(x^2 – x + 2)^2 + (x – 2)^2$;
d) $6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$;

e) $x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$.
f) $x^8 + x^4 + 1$;
g) $x^{10} + x^5 + 1$;
h) $x^{12} + 1$;
i) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$;
k) $(x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$.

4. Chuyên đề: Xác định đa thức

* Định lí Beout (BêZu) và ứng dụng:
1) Định lí BêZu:

Dư trong phép chia đa thức f(x) cho nhị thức x - a bằng f(a) (giá trị của f(x) tại x = a): $f(x) = (x-a)q(x) + f(a)$

(Beout, 1730 - 1783, nhà toán học Pháp)

Hệ quả: Nếu a là nghiệm của đa thừc f(x) thì f(x) chia hết cho x - a.

áp dụng: Định lí BêZu có thể dùng để phân tích một đa thức thành nhân tử. Thực hiện như sau:

Bước 1: Chọn một giá trị x = a nào đó và thử xem x = a có phải là nghiệm của f(x) không.

Bước 2: Nếu f(a) = 0, theo định lí BêZu ta có: $f(x) = (x-a)p(x)$

Để tìm p(x) thực hiện phép chia f(x) cho x - a.

Bước 3: Tiếp tục phân tích p(x) thành nhân tử nếu còn phân tích được. Sau đó viết kết quả cuối cùng cho hợp lí.

Dạng 1: Tìm đa thức thương bằng phương pháp đồng nhất hệ số(phương pháp hệ số bất định), phương pháp giá trị riêng , thực hiện phép chia đa thức.

*Phương pháp1: Ta dựa vào mệnh đề sau đây :

Nếu hai đa thức P(x) và Q(x) bằng nhau: P(x) = Q(x) thì các hạng tử cùng bậc ở hai đa thức phải có hệ số phải có hệ số bằng nhau.

Ví dụ: $P(x) = ax^2 + 2bx - 3$; $Q(x) = x^2 - 4x - p$

Nếu P(x) = Q(x) thì ta có:

a = 1(hệ số của lũy thừa 2)
2b = - 4 (hệ số của lũy thừa bậc 1)
- 3 = - p (hệ số hạng tử bậc không hay hạng tử tự do)

*Phương pháp2: Cho hai đa thức P(x) và Q(x) thỏa mãn deg P(x) > deg Q(x)

Gọi thương và dư trong phép chia P(x) cho Q(x) lần lượt là M(x) và N(x)

Khi đó ta có: $P(x) = Q(x).M(x) + N(x)$ (Trong đó: deg N(x) < deg Q(x)) (I)

Vì đẳng thức (I) đúng với mọi x nên ta cho x lấy một giá trị bất kì : $x = \alpha$ (α là hằng số). Sau đó ta đi giải phương trình hoặc hệ phương trình để tìm các hệ số của các hạng tử trong các đa thức (Đa thức thương, đa thức chia, đa thức bị chia, số dư).

Ví dụ: Bài 1(Phần bài tập áp dụng)

Gọi thương của phép chia A(x) cho x + 1 là Q(x), ta có:

$a^2x^3 + 3ax^2 - 6x - 2a = (x+1).Q(x)$.

Vì đẳng thức đúng với mọi x nên cho x = -1 ta dược:

$-a^2+3a+6-2a=0 \Rightarrow -a^2+a+6=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2 \\ a=3 \end{array}\right.$

Với a = -2 thì $A=4x^3-6x^2-6x+4, Q(x)=4x^2-10x+4$

Với a = 3 thì $A=9x^3+9x^2-6x-6, Q(x)=9x^2-6$

***Phương pháp 3:Thực hiện phép chia đa thức (như SGK)**

Bài tập áp dụng

Bài 1: Cho đa thức $A(x)=a^2x^3+3ax^2-6x-2a (a\in Q)$. Xác định a sao cho A(x) chia hết cho x + 1.

Bài 2: Phân tích đa thức $P(x)=x^4-x^3-2x-4$ thành nhân tử, biết rằng một nhân tử có dạng: x^2+dx+2

Bài 3: Với giá trị nào của a và b thì đa thức : x^3+ax^2+2x+b chia hết cho đa thức: x^2+x+1. Hãy giải bài toán trên bằng nhiều cách khác nhau.

Bài 4: Xác định giá trị k để đa thức: $f(x)=x^4-9x^3+21x^2+x+k$ chia hết cho đa thức: $g(x)=x^2-x-2$.

Bài 5: Tìm tất cả các số tự nhiên k để cho đa thức: $f(k)=k^3+2k^2+15$ chia hết cho nhị thức: $g(k)=k+3$.

Bài 6: Với giá trị nào của a và b thì đa thức: $f(x)=x^4-3x^3+3x^2+ax+b$ chia hết cho đa thức: $g(x)=x^2-3x+4$.

Bài 7: a) Xác định các giá trị của a, b và c để đa thức: $P(x)=x^4+ax^2+bx+c$ Chia hết cho $(x-3)^3$.

b) Xác định các giá trị của a, b để đa thức: $Q(x)=6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ chia hết cho đa thức $M(x)=x^2-x+b$.

c) Xác định a, b để $P(x)=x^3+5x^2-8x+a$ chia hết cho $M(x)=x^2+x+b$.

Bài 8: Hãy xác định các số a, b, c để có đẳng thức:

$x^3-ax^2+bx-c=(x-a)(x-b)(x-c)$

(Để học tốt Đại số 8)

Bài 9: Xác định hằng số a sao cho:

a) $10x^2-7x+a$ chia hết cho $2x-3$.

b) $2x^2+ax+1$ chia cho $x-3$ dư 4.

c) ax^5+5x^4-9 chia hết cho $x-1$.

Bài 10: Xác định các hằng số a và b sao cho:

a) x^4+ax^2+b chia hết cho x^2-x+1.

b) $ax^3+bx^2+5x-50$ chia hết cho $x^2+3x+10$.

c) ax^4+bx^2+1 chia hết cho $(x-1)^2$.

d) x^4+4 chia hết cho x^2+ax+b.

Bài 11: Tìm các hăng số a và b sao cho x^3+ax+b chia cho $x+1$ thì dư 7, chia cho $x-3$ thì dư -5.

Bài 12: Tìm các hằng số a, b, c sao cho ax^3+bx^2+c chia hết cho $x+2$, chia cho x^2-1 thì dư $x+5$.

(Một số vấn đề phát triển Đại số 8)

Bài 13: Cho đa thức: $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + ax + b$ và $Q(x) = x^2 + x - 2$. Xác định a, b để P(x) chia hết cho Q(x).
Bài 14: Xác định a và b sao cho đa thức $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ chia hết cho đa thức $Q(x) = (x-1)^2$
Bài 15: Cho các đa thức $P(x) = x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ và $Q(x) = x^2 - x + b$. Xác định a và b để P(x) chia hết cho Q(x).

(23 chuyên đề toán sơ cấp)

Dạng 2: **Phương pháp nội suy NiuTơn**
Phương pháp:

Để tìm đa thức P(x) bậc không quá n khi biết giá trị của đa thức tại n + 1 điểm $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_{n+1}$ ***ta có thể biểu diễn P(x) dưới dạng:***

$$P(x) = b_0 + b_1(x - C_1) + b_2(x - C_1)(x - C_2) + \cdots + b_n(x - C_1)(x - C_2)\cdots(x - C_n)$$

Bằng cách thay thế x lần lượt bằng các giá trị $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_{n+1}$ ***vào biểu thức P(x) ta lần lượt tính được các hệ số*** $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n$.

Bài tập áp dụng

Bài 1: Tìm đa thức bậc hai P(x), biết: $P(0) = 25, P(1) = 7, P(2) = -9$.

Giải

Đặt $P(x) = b_0 + b_1x + b_2x(x-1)$ ***(1)***

Thay x lần lượy bằng 0; 1; 2 vào ***(1)*** *ta được:*
$$\begin{aligned} &b_0 = 25 \\ &7 = 25 + b_1 \Leftrightarrow b_1 = -18 \\ &-9 = 25 - 18.2 + b_2.2.1 \Leftrightarrow b_2 = 1 \end{aligned}$$

Vậy, đa thức cần tìm có dạng:
$P(x) = 25 - 18x + x(x-1) \Leftrightarrow P(x) = x^2 - 19x + 25$.

Bài 2: Tìm đa thức bậc 3 P(x), biết: $P(0) = 10, P(1) = 12, P(2) = 4, P(3) = 1$
Hướng dẫn: *Đặt* $P(x) = b_0 + b_1x + b_2x(x-1) + b_3x(x-1)(x-2)$ ***(1)***

Bài 3: Tìm đa thức bậc ba P(x), biết khi chia P(x) cho $(x-1), (x-2), (x-3)$ đều được dư bằng 6 và P(-1) = - 18.
Hướng dẫn: *Đặt* $P(x) = b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)(x-2) + b_3(x-1)(x-2)(x-3)$ ***(1)***

Bài 4: Cho đa thức bậc bốn P(x), thỏa mãn: $\begin{aligned} &P(-1) = 0 \\ &P(x) - P(x-1) = x(x+1)(2x+1), (1) \end{aligned}$

a) Xác định P(x).
b) Suy ra giá trị của tổng $S = 1.2.3 + 2.3.5 + \ldots + n(n+1)(2n+1), (n \in N^*)$.

Hướng dẫn: Thay x lần lượt bằng 0; 1; 2; 3 vào (1), ta được :
$$\begin{aligned} &P(-1) - P(-2) = 0 \Leftrightarrow P(-2) = 0, \\ &P(0) - P(-1) = 0 \Leftrightarrow P(0) = 0 \\ &P(1) - P(0) = 1.2.3 \Leftrightarrow P(1) = 6 \\ &P(2) - P(1) = 2.3.5 \Leftrightarrow P(2) = 36 \end{aligned}$$

Đặt $P(x) = b_0 + b_1(x+1) + b_2(x+1)x + b_3(x+1)x(x-1) + b_4(x+1)x(x-1)(x-2)$ *(2)*
Thay x lần lượt bằng -1; 0; 1; 2; -2 vào (2) ta được:

$$0 = b_0$$
$$0 = b_1 \Leftrightarrow b_1 = 0,$$
$$6 = b_2.2.1 \Leftrightarrow b_2 = 3,$$
$$36 = 3.3.2 + b_3.3.2.1 \Leftrightarrow b_3 = 3$$
$$0 = 3.(-1)(-2) + 3.(-1)(-2)(-3) + b_4(-1)(-2)(-3)(-4) \Leftrightarrow b_4 = \frac{1}{2}$$

Vậy, đa thức cần tìm có dạng:

$$P(x) = 3(x+1)x + 3(x+1)x(x-1) + \frac{1}{2}(x+1)x(x-1)(x-2) = \frac{1}{2}x(x+1)^2(x+2)$$

(Tuyển chọn bài thi HSG Toán THCS)

Bài 5: cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c, (a, b, c \neq 0)$. Cho biết $2a + 3b + 6c = 0$

1) Tính a, b, c theo $P(0), P\left(\frac{1}{2}\right), P(1)$.

2) Chứng minh rằng: $P(0), P\left(\frac{1}{2}\right), P(1)$ không thể cùng âm hoặc cùng dương.

Bài 6: Tìm một đa thức bậc hai, cho biết: $\begin{array}{l} P(0) = 19 \\ P(1) = 85 \\ P(2) = 1985 \end{array}$

5. Chuyên đề: Biến đổi phân thức hữu tỉ

Ví du 1.

a) Chứng minh rằng phân số $\frac{3n+1}{5n+2}$ là phân số tối giản $\forall n \in N$;

b) Cho phân số $A = \frac{n^2+4}{n+5}$ $(n \in N)$. Có bao nhiêu số tự nhiên n nhỏ hơn 2009 sao cho phân số A chưa tối giản. Tính tổng của tất cả các số tự nhiên đó.

Lời giải

a) Đặt d = ƯCLN(5n + 2 ; 3n + 1) $\Rightarrow$ 3(5n + 2) – 5(3n + 1) M d hay 1 M d $\Rightarrow$ d = 1.

Vậy phân số $\frac{3n+1}{5n+2}$ là phân số tối giản.

b) Ta có $A = n - 5 + \frac{29}{n+5}$. Để A chưa tối giản thì phân số $\frac{29}{n+5}$ phải chưa tối giản. Suy ra n + 5 phải chia hết cho một trong các ước dương lớn hơn 1 của 29.

Vì 29 là số nguyên tố nên ta có n + 5 M 29

$\Rightarrow$ n + 5 =29k ($k \in N$) hay n=29k – 5.

Theo điều kiện đề bài thì $0 \leq n = 29k - 5 < 2009$

$\Rightarrow 1 \leq k \leq 69$ hay $k \in \{1; 2; \ldots; 69\}$

Vậy có 69 số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện đề bài.
Tổng của các số này là : 29(1 + 2 + … + 69) – 5.69 = 69690.

Ví du 2. Cho a, b, c ≠ 0 và a + b + c ≠ 0 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$.

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có hai số đối nhau. Từ đó suy ra rằng :

$$\frac{1}{a^{2009}}+\frac{1}{b^{2009}}+\frac{1}{c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}}.$$

Lời giải

Ta có : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c(a+b+c)}=0 \Leftrightarrow (a+b).\frac{c(a+b+c)+ab}{abc(a+b+c)}=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right. \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Từ đó suy ra : $\frac{1}{a^{2009}}+\frac{1}{b^{2009}}+\frac{1}{c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}}+\frac{1}{(-c)^{2009}}+\frac{1}{c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}}$

$$\frac{1}{a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}+(-c)^{2009}+c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^{2009}}+\frac{1}{b^{2009}}+\frac{1}{c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}}.$$

Ví du 3. Đơn giản biểu thức :

$$A=\frac{1}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\frac{3}{(a+b)^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{6}{(a+b)^5}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Lời giải

Đặt S = a + b và P = ab. Suy ra : $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=S^2-2P$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=S^3-3SP.$$

Do đó : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{S}{P}$; $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{S^2-2P}{P^2}$;

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}=\frac{a^3+b^3}{a^3b^3}=\frac{S^3-3SP}{P^3}.$$

Ta có : $A=\frac{1}{S^3}.\frac{S^3-3SP}{P^3}+\frac{3}{S^4}.\frac{S^2-2P}{P^2}+\frac{6}{S^5}.\frac{S}{P}$

=

$$\frac{S^2-3P}{S^2P^3}+\frac{3(S^2-2P)}{S^4P^2}+\frac{6}{S^4P}=\frac{(S^4-3S^2P)+(3S^2P-6P^2)+6P^2}{S^4P^3}=\frac{S^4}{S^4P^3}$$

Hay $A=\frac{1}{P^3}=\frac{1}{a^3b^3}$.

Ví du 4. Cho a, b, c là ba số phân biệt. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x :

$$S(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}.$$

Lời giải

Cách 1

$$S(x)=\frac{x^2-(a+b)x+ab}{(c-a)(c-b)}+\frac{x^2-(b+c)x+bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{x^2-(c+a)x+ca}{(b-c)(b-a)}=Ax^2-Bx+C$$

với : $A=\frac{1}{(c-a)(c-b)}+\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}$;

$B=\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}+\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a}{(b-c)(b-a)}$;

$C=\frac{ab}{(c-a)(c-b)}+\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-c)(b-a)}$

Ta có : $A=\frac{b-a+c-b+a-c}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$;

$$B=\frac{(a+b)(b-a)+(b+c)(c-b)+(c+a)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{b^2-a^2+c^2-a^2+a^2-c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0;$$

$$C=\frac{ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{ab(b-a)+bc[(c-a)+(a-b)]+ca(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(a-b)(bc-ab)+(c-a)(bc-ca)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1.$$

Vậy $S(x)=1\,\forall x$ (đpcm).

Cách 2

Đặt $P(x) = S(x) – 1$ thì đa thức $P(x)$ là đa thức có bậc không vượt quá 2. Do đó, $P(x)$ chỉ có tối đa hai nghiệm.

Nhận xét : $P(a) = P(b) = P(c) = 0 \Rightarrow$ a, b, c là ba nghiệm phân biệt của $P(x)$.

Điều này chỉ xảy ra khi và chỉ khi $P(x)$ là đa thức không, tức là $P(x) = 0\ \forall x$.

Suy ra $S(x) = 1\ \forall x \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 9. Cho $x+\frac{1}{x}=3$. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $A=x^2+\frac{1}{x^2}$; b) $B=x^3+\frac{1}{x^3}$; c) $C=x^4+\frac{1}{x^4}$; d) $D=x^5+\frac{1}{x^5}$.

Lời giải

a) $A=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=9-2=7$;

b) $B = x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 27 - 9 = 18$;

c) $C = x^4 + \dfrac{1}{x^4} = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 49 - 2 = 47$;

d) $A.B = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right) = x^5 + \dfrac{1}{x} + x + \dfrac{1}{x^5} = D + 3 \Rightarrow D = 7.18 - 3 = 123.$

Ví du 5. Xác định các số a, b, c sao cho : $\dfrac{2}{(x^2+1)(x-1)} = \dfrac{ax+b}{x^2+1} + \dfrac{c}{x-1}$.

Lời giải

Ta có :

$$\frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1) + c(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{(a+c)x^2 + (b-a)x + (c-b)}{(x^2+1)(x-1)}$$

Đồng nhất phân thức trên với phân thức $\dfrac{2}{(x^2+1)(x-1)}$, ta được :

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b - a = 0 \\ c - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}. \text{ Vậy } \frac{2}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{-x-1}{x^2+1} + \frac{1}{x-1}.$$

6. Chuyên đề: Giải phương trình

I/Phương trình ax+b=0 (1) và phương trình đưa về dạng (1)

****Cách giải***: (Biến đổi và đưa hết về một vế sau đó rút gọn thành dạng ax+b=0)

TH1:a=0 nếu $b \neq 0$ thì phương trình (1)vô nghiệm

nếu b=0 thì phương trình (1) vô số nghiệm

TH2:$a \neq 0$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{-b}{a}$

****Ví dụ:*** a)3x+1=7x-11

b1: 3x+1-7x+11=0 (biến đổi và chuyển về một vế)

b2: -4x+12=0 (rút gọn về dạng ax+b=0)

b3: x=$\frac{-12}{-4}=3$

b)1,2-(x-0,8)= -2(0,9+x)

$\Leftrightarrow$ 1,2-x+0,8+1,8+2x=0

$\Leftrightarrow$ x+3,8=0

$\Leftrightarrow$ x= -3,8

Các bài tập tương tự:

a)7x+21=0

c)5x-2=0

e)0.25x+1,5=0

g)$\frac{4}{3}x-\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$

i)11-2x=x-1

l)2(x+1)=3+2x

n)2,3x-2(0,7+2x)=3,6-1,7x

p)3(2,2-03x)=2,6+(0,1x-4)

v)$2\left(x+\frac{3}{5}\right)=5-\left(\frac{13}{5}+x\right)$

s)$\frac{7x}{8}-5(x-9)=\frac{20x+1,5}{6}$

b)12-6x=0

d)-2x+14=0

f)6,36-5,3x=0

h)$\frac{-5}{9}x+1=\frac{2}{3}x-10$

k)5-3x=6x+7

m)2(1-1,5x)+3x=0

o)3,6-0,5(2x+1)=x-0,25(2-4x)

q)$\frac{x-3}{5}=6-\frac{1-2x}{3}$

w)$\frac{3x-2}{6}-5=\frac{3-2(x+7)}{4}$

y)$\frac{5(x-1)+2}{6}-\frac{7x-1}{4}=\frac{2(2x+1)}{7}-5$

II/Phương trình tích:

Cách giải: Pt:A.B=0 $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right.$ (A=0 (1) B=0 (2))

Ta có pt (1),(2) là phương trình bậc nhất cách giải tương tự phần trên

(Chú ý các phương trình chưa có dạng A.B=0 ta đưa về dạng A.B=0 bằng cách phân tích thành nhân tử)

Ví dụ:

a)(4x-10)(24+5x)=0

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 4x-10=0 & (1) \\ 24+5x=0 & (2) \end{array}\right.$

Từ (1) x=$\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$ (2)$\Rightarrow$x=$\frac{-24}{5}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm x=$\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$ hoặc x=$\frac{-24}{5}$

b)(x-1)(5x+3)=(3x-8)(x-1)

$\Leftrightarrow$ (x-1)(5x+3)-(3x-8)(x-1)=0

$\Leftrightarrow$ (x-1)(2x+11)=0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x-1=0 & \Leftrightarrow x=1 \\ 2x+11=0 & \Leftrightarrow x=\dfrac{-11}{2} \end{array}\right.$$

Các bài tập tương tự:

a)(3,5-7x)(0,1x+2,3)=0

b)(3x-2)$\left(\dfrac{2(x+3)}{7}-\dfrac{4x-3}{5}\right)=0$

c)(3,3-11x)$\left(\dfrac{7x+2}{5}+\dfrac{2(1-3x)}{3}\right)=0$

d) $(\sqrt{3}-x\sqrt{5})(2x\sqrt{2}+1)=0$

e) $(2x-\sqrt{7})(x\sqrt{10}+3)=0$

f) $(2-3x\sqrt{5})(2,5x+\sqrt{2})=0$

g)3x(25x+15)-35(5x+3)=0

h)(2-3x)(x+11)=(3x-2)(2-5x)

i)$(2x^2+1)(4x-3)=(2x^2+1)(x-12)$

k)$(2x-1)^2+(2-x)(2x-1)=0$

l)$(x+2)(3-4x)=x^2+4x+4$

m)$(x-1)(x^2+5x-2)-(x^2-1)=0$

n)$x^3+1=x(x+1)$

0)$x^2+(x=2)$ (11x-7)=4

p)$x^3+x^2+x+1=0$

q)$x^2-3x+2=0$

r)$4x^2-12x+5=0$

s)$-x^2+5x-6=0$

t)$2x^2+5x+3=0$

y) $\left(x-\sqrt{2}\right)+3(x^2-2)=0$